Zyklus 3

- Tauschhandel
- Magische Tunnel
- Vier Besorgungen
- Höhlenforschung
- Getränkeautomat
- Pizzeria Biberia
- Flughafen
- Flussdiagramm
- Wege durch den Irrgarten
- Hilf dem Arabot!
- Algorithmen, Flussdiagramme und Schwarze Löcher

7. Tauschhandel (SJ 3/4, 5/6, 7/8)

Bei der grossen Flut hat Benny Biber sein Hab und Gut verloren – ausser einer Bürste. Diese will er nun gegen einen anderen Gegenstand eintauschen, den er dann wiederum eintauschen will, usw. Sein Ziel ist es, mit mehrmaligem Tauschen zu einem Haus zu kommen. Benny hat die folgenden Tauschangebote im Bibernet gefunden. Zum Beispiel möchte Anna für eine Bürste einen Ballon geben.

Wie kann Benny mit mehrmaligem Tauschen zu einem Haus kommen?

Name	nimmt	gibt dafür
Anna	Bürste	Ballon
Bert	Bürste	Korb
Claudia	Ballon	Boot
Daniel	Boot	Motorrad
Emil	Ballon	Fahrrad
Franziska	Korb	Boot
Gustav	Korb	Hund
Helen	Hund	Ballon
Ivo	Fahrrad	Ballon
Jeanine	Hund	Teppich
Klaus	Teppich	Motorrad
Lili	Gemälde	Teppich
Monika	Fahrrad	Motorrad
Norbert	Teppich	Haus

Name	nimmt	gibt dafür

Angebote von links hierher ziehen und in die richtige Reihenfolge bringen!

Ziehe passende Tauschangebote nach rechts

und bringe sie dort in die richtige Reihenfolge.

Wenn du fertig bist, klicke auf Antwort speichern!

Lösung:

So ist es richtig:

Name	nimmt	gibt dafür
Bert	Bürste	Korb
Gustav	Korb	Hund
Jeanine	Hund	Teppich
Norbert	Teppich	Haus

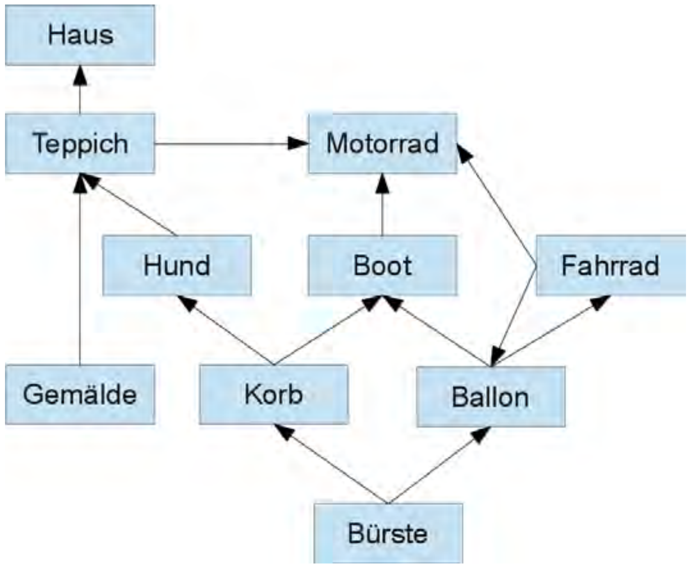
Stufen	**3-4**	Leicht	Mittel	**Schwer**
Stufen	**5-6**	Leicht	**Mittel**	Schwer
Stufen	**7-8**	**Leicht**	Mittel	Schwer
Stufen	9-10	Leicht	Mittel	Schwer
Stufen	11-13	Leicht	Mittel	Schwer

DAS IST INFORMATIK!

Der ganze Tauschhandel kann als „gerichteter Graph“ betrachtet werden.

Die Knoten des Graphen, hier als Kästchen dargestellt, sind die Tauschobjekte. Die Pfeile des Graphen sind die Tauschangebote.

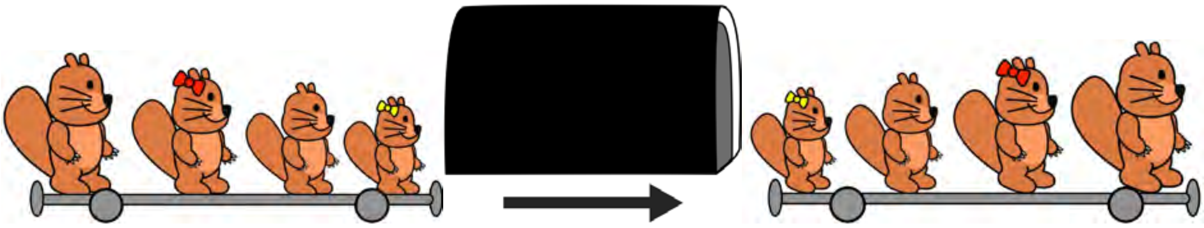
Ein Weg im Graphen, den Pfeilen folgend von einem Knoten zu einem anderen Knoten, zeigt, wie man mehrmalig tauschen kann.



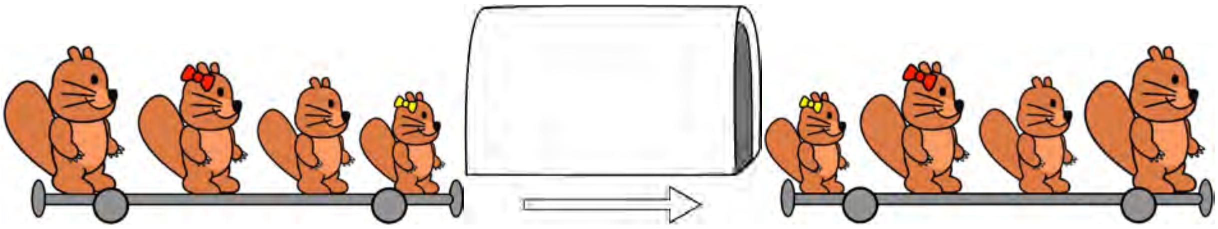
Nicht jeder Knoten ist von jedem anderen Knoten aus über einen Weg "erreichbar", man kann also nicht jedes Tauschobjekt gegen jedes andere eintauschen.

11. Magische Tunnel (SJ 5/6, 7/8)

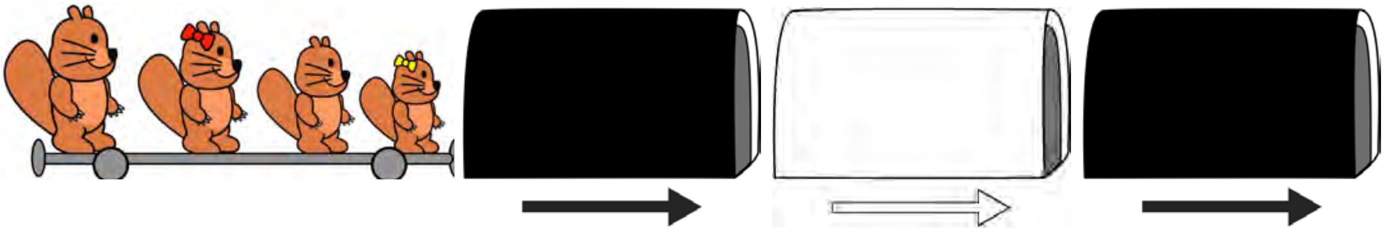
Die Biber-Bahn kennt zwei Sorten Tunnel. Fährt ein Waggon durch einen schwarzen Tunnel, kommen die Passagiere in umgekehrter Reihenfolge wieder heraus:



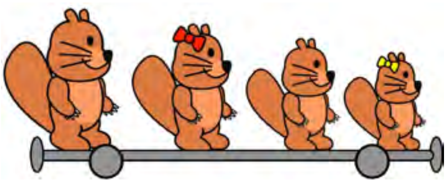
Fährt ein Waggon durch einen weissen Tunnel, sind der erste und der letzte Passagier vertauscht:



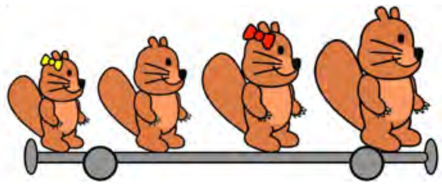
Dieser Waggon fährt jetzt durch drei Tunnel:



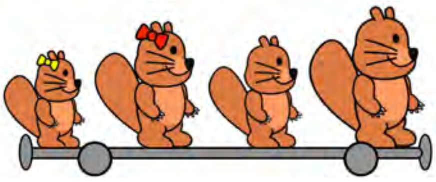
In welcher Reihenfolge kommen die Passagiere aus dem letzten Tunnel?



A



B

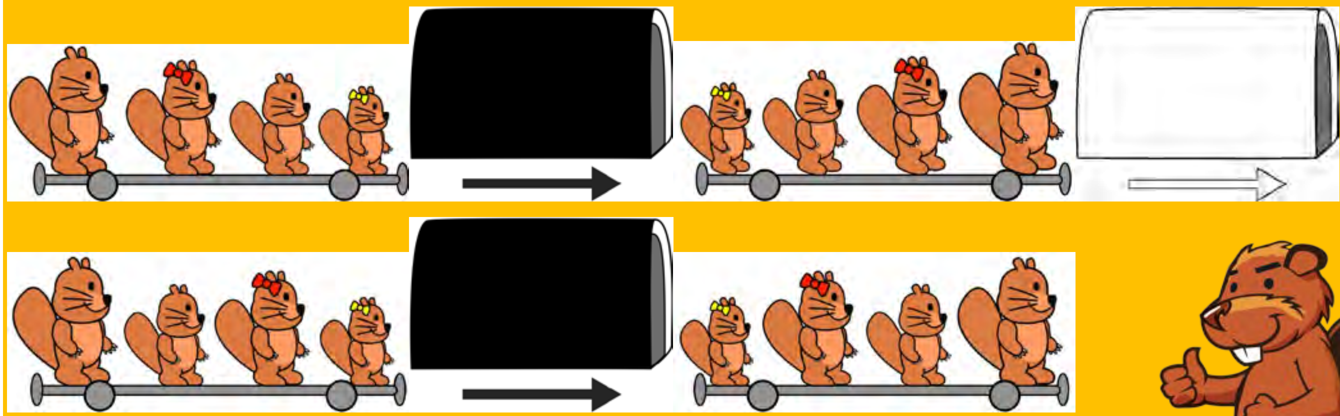


C

D

Lösung:

Antwort C ist richtig:



Reihenfolge: Anfangs 1-2-3-4. Nach dem ersten schwarzen Tunnel 4-3-2-1.

Nach dem weissen Tunnel 1-3-2-4. Nach dem zweiten schwarzen Tunnel 4-2-3-1.

Stufen	3-4	Leicht	Mittel	Schwer
Stufen	**5-6**	Leicht	**Mittel**	Schwer
Stufen	**7-8**	**Leicht**	Mittel	Schwer
Stufen	9-10	Leicht	Mittel	Schwer
Stufen	11-13	Leicht	Mittel	Schwer

DAS IST INFORMATIK!

Der weisse und der schwarze Tunnel repräsentieren zwei Funktionen. Beide verändern die Reihenfolge der Elemente einer Sequenz (der vier Biber). Die beiden „Tunnel-Funktionen“ haben eine besondere Eigenschaft: Sie sind jeweils ihre eigene Umkehrfunktion. Wenn ein Waggon durch zwei schwarze Tunnels fährt, sitzen die Biber wieder so wie am Anfang. Das gleiche gilt für zwei weisse Tunnels.

Wenn man nun eine Folge von ganz vielen Tunnels hat, muss man nur prüfen, ob die Anzahl der weissen und schwarzen Tunnels gerade oder ungerade ist. Genauer gesagt: Man muss die Anzahlen der schwarzen und weissen Tunnel modulo 2 rechnen und hat dann eine viel kürzere Tunnelfolge, die den gleichen Effekt hat. 67 schwarze und 33 weisse Tunnels entsprechen beispielsweise einem weissen und einem schwarzen Tunnel. Das ist Informatik!

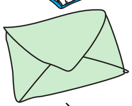
Hallo Lehrende: Stellen Sie mal die Aufgabe mit zufällig 100 Waggons. Zuerst melden sich die Analytiker, mit der richtigen Lösung. Später die Durchprobierer, vermutlich 75 Prozent mit einer falschen Lösung. Und hier noch ein Informatik-Klassiker von 1973 zum Zusammenspiel von Algorithmen und Datenstrukturen und Waggons: http://www.cs.utexas.edu/users/EWD/ewd03xx/EWD365.PDF, zu finden hier: http://www.cs.utexas.edu/users/EWD/

13. Vier Besorgungen

Während ihrer Pause (12.00–13.00 Uhr) möchte Alexandra folgende Aufgaben erledigen:

- ein Buch in der Buchhandlung kaufen
- eine Flasche Milch im Lebensmittelgeschäft kaufen
- das neu gekaufte Buch per Post versenden
- einen Kaffee trinken in der Cafeteria

Für jede Aufgabe hat Alexandra ausgerechnet, wie viel Zeit sie braucht. Die unten aufgelisteten Zeiten sind jedoch nur ausserhalb der Stosszeiten gültig. Daher versucht Alexandra diese Zeiten zu vermeiden.

Ort		Dauer	Stosszeiten
	Buchhandlung	15 Minuten	12.40–13.00 Uhr
	Lebensmittelgeschäft	10 Minuten	12.00–12.40 Uhr
	Post	15 Minuten	12.00–12.30 Uhr
	Cafeteria	20 Minuten	12.30–12.50 Uhr

Ziehe die Aufgaben in eine Reihenfolge, bei der Alexandra an allen Orten die Stosszeiten vermeidet.

Lösung

Die richtige Reihenfolge ist: Cafeteria, Buchhandlung , Post, Lebensmittelgeschäft.
Dieses Problem weist einige Einschränkungen auf. Wenn man die in einer Tabelle darstellt, sieht das so aus (dunkelrot: Stosszeit, hellgrün: keine Stosszeit):

Ort	Besuchsdauer	12.00–12.05	12.05–12.10	12.10–12.15	12.15–12.20	12.20–12.25	12.25–12.30	12.30–12.25	12.35–12.40	12.40–12.45	12.45–12.50	12.50–12.55	12.55–13.00
Buchladen	15 Minuten					X	X	X					
Lebensmittel-geschäft	10 Minuten											X	X
Post	15 Minuten								X	X	X		
Cafeteria	20 Minuten	X	X	X	X								

Alexandra muss vor 12.40 Uhr in der Buchhandlung gewesen sein. Sie muss das Lebensmittelgeschäft nach 12.40 Uhr besuchen. Sie kann auf die Post erst nachdem sie schon die Buchhandlung besucht hat. Die Post kann sie erst nach 12.30 Uhr besuchen. Sie muss die Cafeteria vor 12.30 Uhr besuchen, weil sie nach 12.50 Uhr nicht mehr genügend Zeit für ihre Pause hat.
Der einzige mögliche Zeitplan ist also (in der Graphik oben mit „X“ markiert):

- Cafeteria 12.00–12.20 Uhr
- Buchhandlung 12.20–12.35 Uhr
- Post 12.35–12.50 Uhr
- Lebensmittelgeschäft 12.50–13.00 Uhr

Dies ist Informatik!

Eines der Hauptziele der Informatik ist es, beim Problemlösen Lösungen zu finden, die mit den gegebenen Einschränkungen umgehen können. In unserem Fall sollen die Stosszeiten in Geschäften vermieden werden. Bei anderen Problemen mit Einschränkungen stellt sich oft die Frage, ob es eine Lösung überhaupt gibt bzw. ob alle Einschränkungen aufs Mal berücksichtigt werden können.
Diese Fragen heissen in der Informatik Scheduling-Probleme. Scheduling bedeutet, eine korrekte oder optimale Abfolge für bestimmte Aufgaben zu finden. Es wird in industriellen Anwendungen, bei grösseren Projekten oder auch bei der Produktion von Teilen eingesetzt. Auch in Computern wird es häufig verwendet, wenn beispielsweise mehrere Berechnungen auf verschiedenen CPU-Kernen ausgeführt werden sollen.

Webseiten und Stichwörter

Scheduling, Optimierung

- https://de.wikipedia.org/wiki/Scheduling

17. Höhlenforschung (SJ 5/6,)

21 Höhlenforscher wollen ein Höhlensystem erforschen.

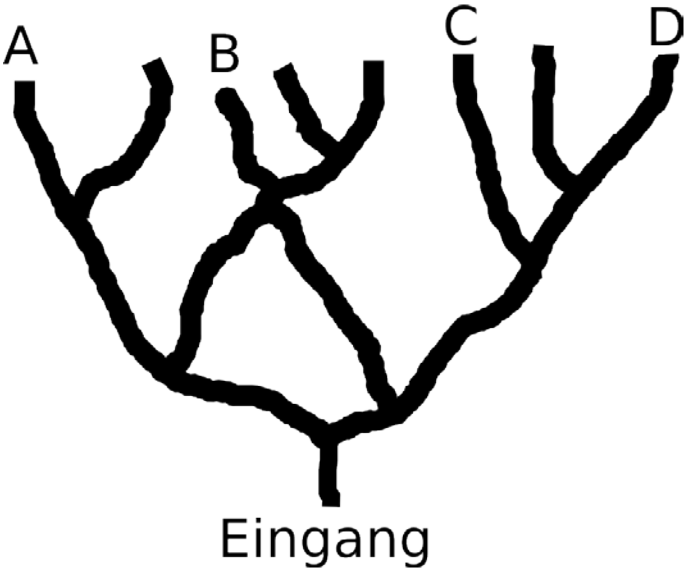
Sie starten am Eingang und gehen bei Verzweigungen stets tiefer in das Höhlensystem hinein.

Sie entfernen sich also immer weiter vom Eingang.

Bei einer Verzweigung teilen sich die Höhlenforscher auf:

Gleich viele Personen gehen nach links und nach rechts.

Bei ungerader Personenzahl geht eine Person mehr nach rechts.



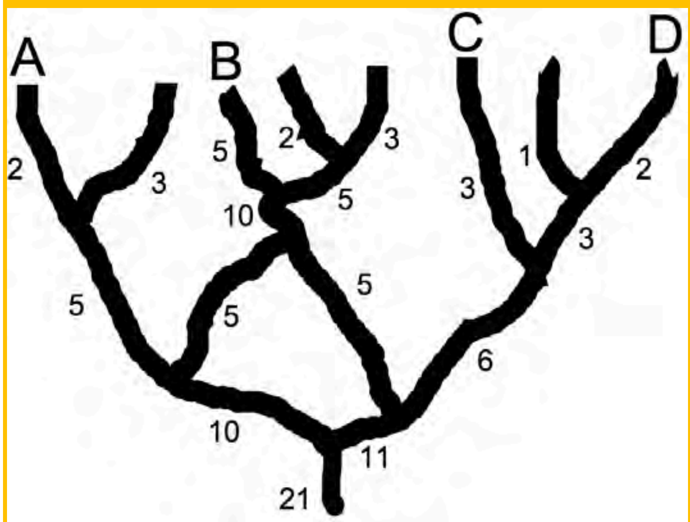
An welcher Stelle werden am Ende die meisten Höhlenforscher ankommen?

A. An der Stelle A B. An der Stelle B C. An der Stelle C D. An der Stelle D

Lösung:

Antwort B ist richtig.

Das Bild zeigt die Aufteilung der Personen an den Verzweigungen.

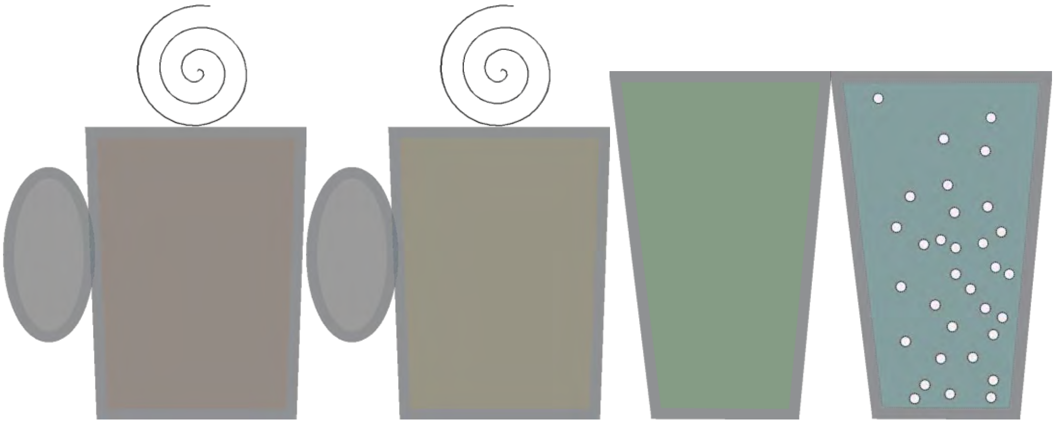


Stufen	3-4	Leicht	Mittel	Schwer
Stufen	**5-6**	Leicht	Mittel	**Schwer**
Stufen	7-8	Leicht	Mittel	Schwer
Stufen	9-10	Leicht	Mittel	Schwer
Stufen	11-13	Leicht	Mittel	Schwer

DAS IST INFORMATIK!

Die Suche in einer verzweigten Höhle kann durch einen Graphen modelliert werden. Jeder Gang ist eine Kante und jede Verzweigung ein Knoten. Graphen sind in der Informatik eine wichtige Datenstruktur zur Modellierung realer Systeme, und die Grundlage vieler Algorithmen. In der Aufgabenstellung wurde zu dem Graphen des Höhlensystems ein Spannbaum der Gänge (mit dem Eingang als Wurzel) definiert, denn die Höhlenforscher wollten sich immer weiter vom Eingang entfernen und somit nicht im Kreis gehen.

18. Getränkeautomat (SJ 5/6)



Oh nein! Der neue Getränkeautomat hat nur zwei Tasten: Taste A und Taste B. Es sollen aber vier Getränke zur Wahl stehen: Die Heissgetränke Kaffee und Tee sowie die Kaltgetränke Apfelsaft und Mineralwasser. Der schlaue Hausmeister programmiert den Automaten so, dass durch ein Drücken von zwei Tasten die vier Getränke wählbar sind:

Drücke zuerst die Taste A für Heissgetränk oder die Taste B für Kaltgetränk.

Dann drücke die Taste A für Kaffee oder die Taste B für Tee,

beziehungsweise die Taste A für Apfelsaft oder die Taste B für Mineralwasser.

Leider will der Hausmeister keine Benutzungsanleitung herausrücken. Deshalb kursieren unter den Schülerinnen und Schülern verschiedenste Anweisungen zur Benutzung des Getränkeautomaten. Nicht alle sind richtig.

Beispiel für eine richtige Anweisung: Drücke erst Taste B und dann Taste A für Apfelsaft.

Welche Anweisung ist richtig?

A) Drücke erst Taste A und dann nochmal Taste A für zwei Heissgetränke.

B) Drücke erst Taste A und dann Taste B für einen heissen Tee.

C) Drücke erst Taste B und dann nochmal Taste B für einen kalten Tee.

D) Drücke Taste B für ein Mineralwasser.

Lösung:

Antwort B ist richtig:

Jedes Getränk wird durch zwei Tastendrücke ausgewählt:

A) A – A bedeutet Heissgetränk – Kaffee. Das ist nur ein Getränk.

B) A – B bedeutet Heissgetränk – Tee. Das ist richtig.

C) B – B bedeutet Kaltgetränk – Mineralwasser. Kalten Tee gibt es hier nicht.

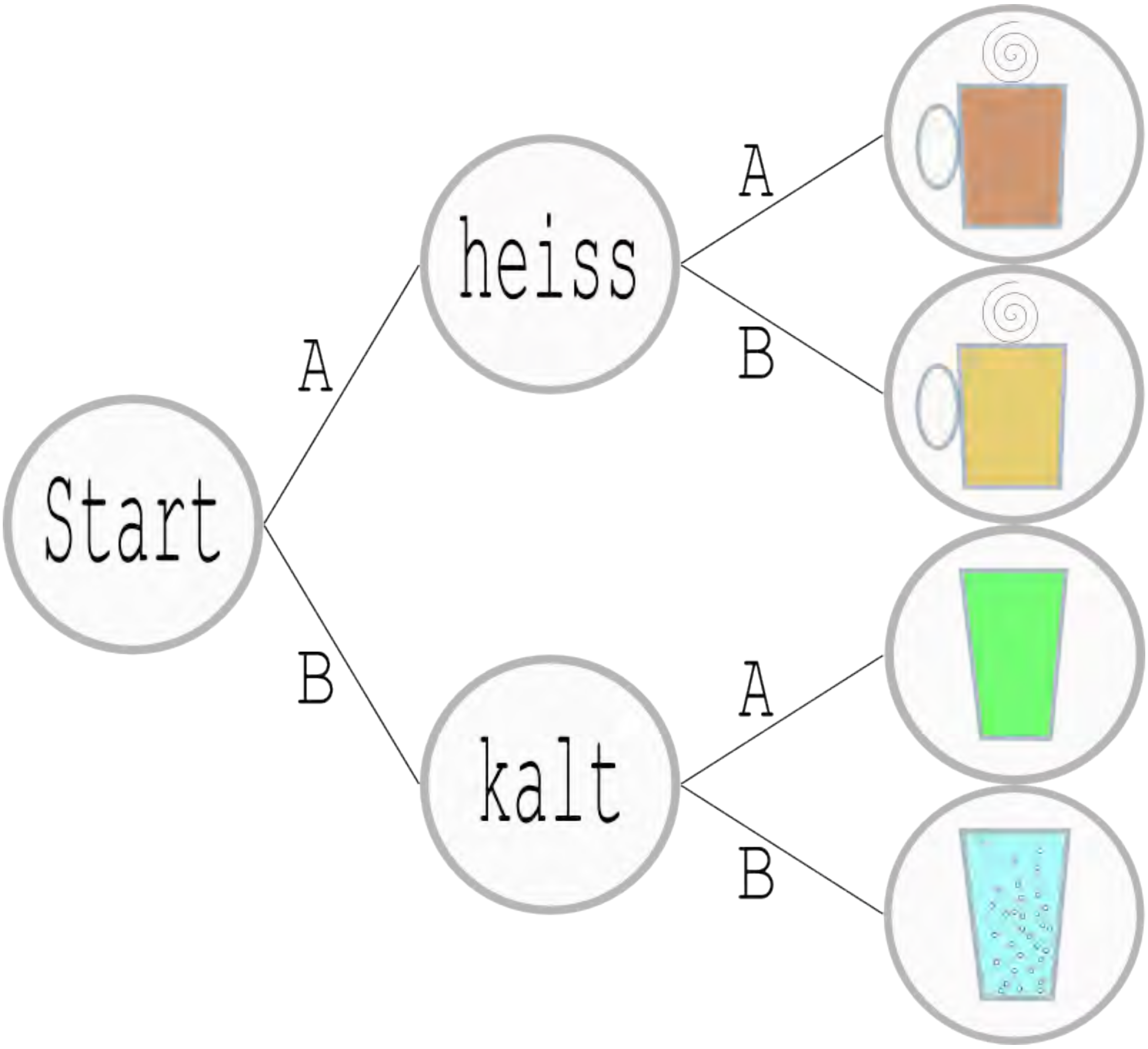
D) B bedeutet Kaltgetränk. Eine weitere Taste muss gedrückt werden.

Stufen	3-4	Leicht	Mittel	Schwer
Stufen	**5-6**	Leicht	Mittel	**Schwer**
Stufen	7-8	Leicht	Mittel	Schwer
Stufen	9-10	Leicht	Mittel	Schwer
Stufen	11-13	Leicht	Mittel	Schwer

Das ist Informatik!

Das ist Informatik, denn es hat mit Codierung zu tun. Bei zwei Tasten wird eine Codelänge von 2 benötigt, um 4 Getränke zu codieren (AA, AB, BA, BB).

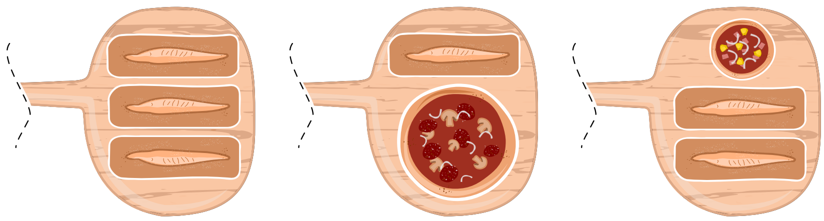
Ausserdem hat es mit Endlichen Automaten zu tun. Das sind gedachte Maschinen, mit denen das Verhalten echter Maschinen als Folge von Zustandsübergängen modelliert wird. Um die Steuerung des Getränkeautomaten zu beschreiben, bräuchte man einen Startzustand, zwei Zustände für Heiss- und Kaltgetränke und vier Endzustände.



Vom Startzustand könnte der Automat nur in die Zustände heiss oder kalt wechseln. Von heiss aus wäre nur noch Kaffee oder Tee erreichbar. Von kalt aus wäre nur Apfelsaft oder Mineralwasser möglich. Das Diagramm hilft, die Frage zu beantworten, da klar zu erkennen ist, A – A führt zu Kaffee, B – B zu Mineralwasser, B führt nur in den Zustand für ein Heissgetränk, nicht weiter.

20. Pizzeria Biberia

Die Pizzeria Biberia hat nur einen Pizzaofen, daher können nur wenige Gerichte gleichzeitig gebacken werden.
Die Kombinationen sind:

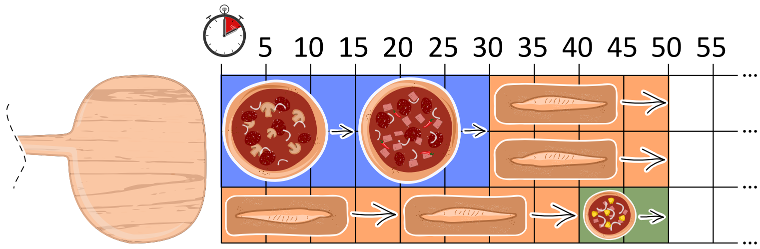


3 Ciabatta-Brote | 1 Ciabatta-Brot, 1 grosse Pizza | 2 Ciabatta-Brote, 1 kleine Pizza

Die Gerichte brauchen unterschiedlich lang: Eine kleine Pizza muss 10 Minuten im Ofen sein, eine grosse Pizza muss 15 Minuten im Ofen sein und ein Ciabatta-Brot muss 20 Minuten im Ofen sein. Der Pizzabäcker kann jedoch Gerichte einzeln in den Ofen legen oder aus dem Ofen holen.
Heute ist viel los: Es werden eine kleine Pizza, zwei grosse Pizzen und vier Ciabatta-Brote bestellt. Die Gäste sind hungrig und möchten ihre Bestellung so schnell wie möglich bekommen.
In wie vielen Minuten kann der Pizzabäcker die Bestellung schnellstmöglich backen lassen?

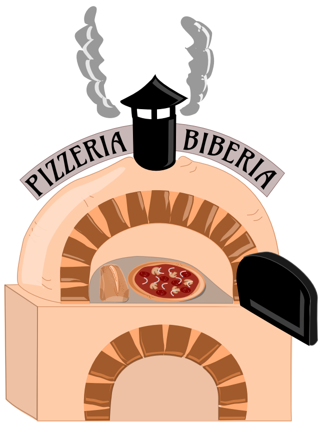
Lösung

Es gibt mehrere optimale Lösungen. Am einfachsten findet man eine dieser Lösungen, wenn man die beiden grossen Pizzen hintereinander backt, parallel dazu zwei Ciabatta-Brote backt und dann mit zwei Ciabatta-Broten und einer kleinen Pizza ergänzt:



Diese Lösung benötigt 50 Minuten. Eine schnellere Lösung kann es nicht geben, da der Platz im Ofen während der 50 Minuten immer voll ausgenutzt wird.

Dies ist Informatik!



Wenn man versucht, einen Ablaufplan (engl. *schedule*) für eine beschränkte Ressource (in diesem Fall der Pizzaofen) zu erstellen, möchte man in der Regel eine optimale Lösung finden, beispielsweise bezüglich der Kosten oder (wie in diesem Fall) bezüglich der Zeit. So wird die Ressource optimal genutzt und damit auch die kürzeste Backzeit erreicht.
Ein weit verbreitetes Verfahren zum Finden von optimalen Ablaufplänen ist das Rundlauf-Verfahren (engl. *Round-Robin*). Bei diesem Verfahren sind alle Prozesse, die stattfinden sollen, in einer Warteschlange. Jeder Prozess bekommt dann für eine kurze Zeit die Ressource zur Verfügung gestellt. Wenn er am Ende der kurzen Zeit noch nicht fertig ist, wird er wieder neu in die Warteschlange eingereiht.
Für diesen Pizzaofen jedoch macht die Strategie nicht viel Sinn ... man nimmt ja keine halbfertige Pizza aus dem Ofen und schiebt sie später wieder rein. Daher kann man in diesem Fall mit einer gierigen (engl. *greedy*) Strategie vorgehen: man fängt mit dem grössten Prozess an (einer grossen Pizza, da diese am meisten Platz wegnimmt) und versucht dann, mit nächstkleineren Prozessen aufzufüllen und so weiter. Da der Ofen (mit Einschränkungen) mehrere Dinge gleichzeitig backen kann, kann man auch immer jeweils das fertige Gericht herausnehmen und durch das nächste zu backende Gericht ersetzen.
Hat man aber am Ende die optimale Lösung gefunden? Das ist nicht offensichtlich, man könnte ja vielleicht eine bessere Lösung finden, indem man beispielsweise mit drei Ciabatta-Broten anfängt. Wenn man es aber geschafft hat, alle Ressourcen immer voll zu belegen (also in diesem Fall den Ofen immer voll zu haben), kann man sich sicher sein, dass es keine bessere Lösung gibt.

Webseiten und Stichwörter

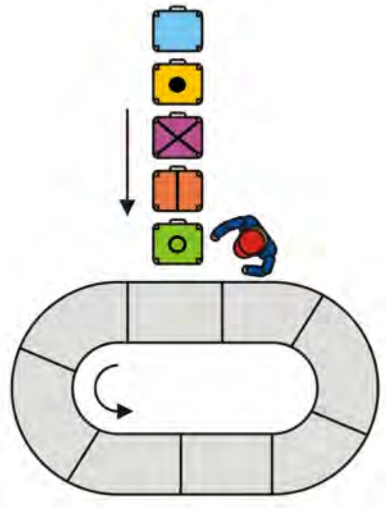
Schedule, Warteschlange, Ressource, Round-Robin, Greedy

- `https://de.wikipedia.org/wiki/Prozess-Scheduler`
- `https://de.wikipedia.org/wiki/Round_Robin_(Informatik)`
- `https://de.wikipedia.org/wiki/Greedy-Algorithmus`

21. Flughafen (SJ 7/8, 9/10)

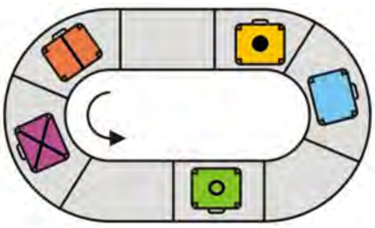
Das Förderband des Flughafens hat 8 Plätze und es dreht sich im Kreis (in Pfeilrichtung). Ein Arbeiter legt 5 Koffer der Reihe nach auf das Förderband.

Er legt den nächsten Koffer immer auf den drittnächsten leeren Platz. Er lässt also die schon belegten Plätze und auch zwei leere Plätze vorbeidrehen.

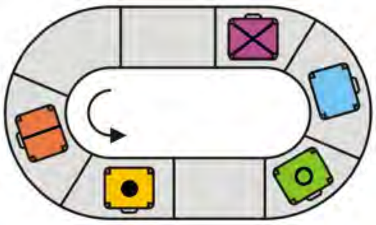


Der Arbeiter ist fertig, wenn alle 5 Koffer auf dem Förderband liegen.

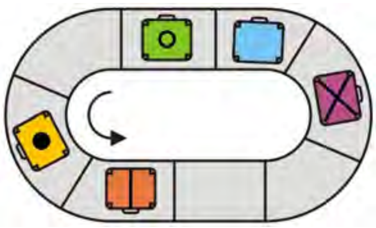
Wie schaut das Förderband am Ende seiner Arbeit aus?



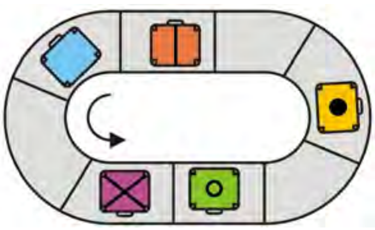
A



B



C



D

Lösung:

Zuerst liegt der Koffer mit dem Kreis irgendwo auf dem leeren Förderband. Dann 3 Plätze dahinter der Koffer mit dem senkrechten Strich. Wieder 3 Plätze dahinter der mit dem Kreuz.

Dann soll der Koffer mit dem Punkt auf den drittnächsten freien Platz kommen.

Da nun aber der Koffer mit dem Kreis dazwischen auf dem Förderband liegt, ist der drittnächste freie Platz der viertnächste Platz nach dem Kreuz.

Zuletzt kommt der Koffer ohne Zeichen auf das Förderband. Dieser muss den senkrechten Strich, zwei leere Plätze und das Kreuz vorbeilassen.

Bei den Antworten A und D liegen die Koffer in falscher Reihenfolge. Würde sich das Förderband anders herum drehen, wäre Antwort C richtig.

Stufen	3-4	Leicht	Mittel	Schwer
Stufen	5-6	Leicht	Mittel	Schwer
Stufen	**7-8**	Leicht	**Mittel**	Schwer
Stufen	**9-10**	**Leicht**	Mittel	Schwer
Stufen	11-13	Leicht	Mittel	Schwer

DAS IST INFORMATIK!

Die genaue Vorschrift, nach der die Koffer platziert werden, kann als Algorithmus aufgefasst werden. Mit Algorithmen werden ganz präzise Abläufe und Berechnungen beschrieben, die dann auch auf einem Computer programmiert und ausgeführt werden könnten.

Programmierer brauchen die Fähigkeit, den Ablauf eines Algorithmus bereits im Kopf nachvollziehen zu können, besonders dann, wenn sie ein Computerprogramm abändern müssen, das jemand anders geschrieben hat.

Die Aufgabe ist nah verwandt mit dem Josephus-Problem, das gerne als Programmieraufgabe verwendet wird.

http://de.wikipedia.org/wiki/Josephus-Problem

http://fr.wikipedia.org/wiki/Probl%C3%A8me_de_Jos%C3%A8phe

http://it.wikipedia.org/wiki/Problema_di_Giuseppe

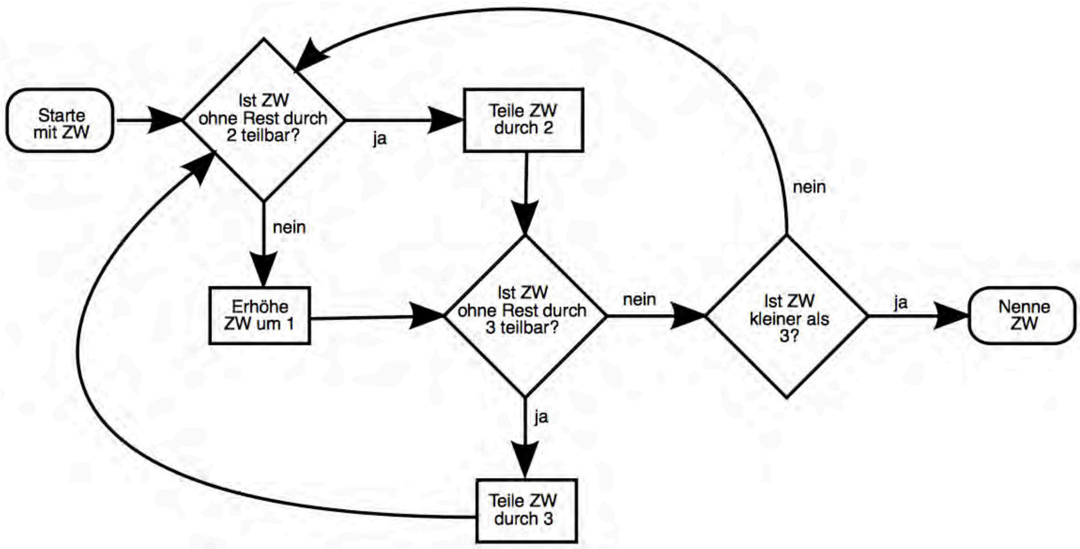
http://www.programmieraufgaben.ch/aufgabe/josephus-problem/zqcht09b

24. Flussdiagramm (SJ 7/8, 9/10)

In der Schule lernen die Biber, Flussdiagramme zu benutzen. Dabei fliesst kein Wasser, sondern mögliche Handlungsfolgen werden beschrieben.

In diesem Flussdiagramm wird in den Handlungen ein Zahlenwert (ZW) verändert.

Die Möglichkeiten hängen von Fragen nach den Eigenschaften des Zahlenwerts ab.



Wenn man mit dem Zahlenwert 18 startet, welcher Zahlenwert wird am Ende genannt?

Gib den genannten Zahlenwert (ZW) hier ein (als Zahl): __________

Lösung:

2 ist richtig:

Das ist der Handlungsfluss:

Starte mit ZW 18.

Ist 18 ohne Rest durch 2 teilbar? Ja. 18 geteilt durch 2 ist 9.

Ist 9 ohne Rest teilbar durch 3? Ja. 9 geteilt durch 3 ist 3.

Ist 3 ohne Rest teilbar durch 2? Nein. 3 um 1 erhöht ist 4.

Ist 4 ohne Rest teilbar durch 3? Nein.

Ist 4 kleiner als 3? Nein.

Ist 4 ohne Rest teilbar durch 2? Ja. 4 geteilt durch 2 ist 2.

Ist 2 kleiner als 3? Ja. Es wird ZW 2 genannt.

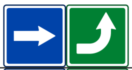
Stufen	3-4	Leicht	Mittel	Schwer
Stufen	5-6	Leicht	Mittel	Schwer
Stufen	**7-8**	Leicht	Mittel	**Schwer**
Stufen	**9-10**	Leicht	Mittel	**Schwer**
Stufen	11-13	Leicht	Mittel	Schwer

Das ist Informatik!

Flussdiagramme werden in der Informatik benutzt, um den Ablauf wichtiger Teile von Programmen zu visualisieren. Etwa die Reaktionen eines Programms auf unterschiedliche Aktionen seiner Benutzer. Es gibt Programmiersysteme auf der Basis von Flussdiagramm-artigen Grafiken, z.B. Scratch http://scratch.mit.edu/.

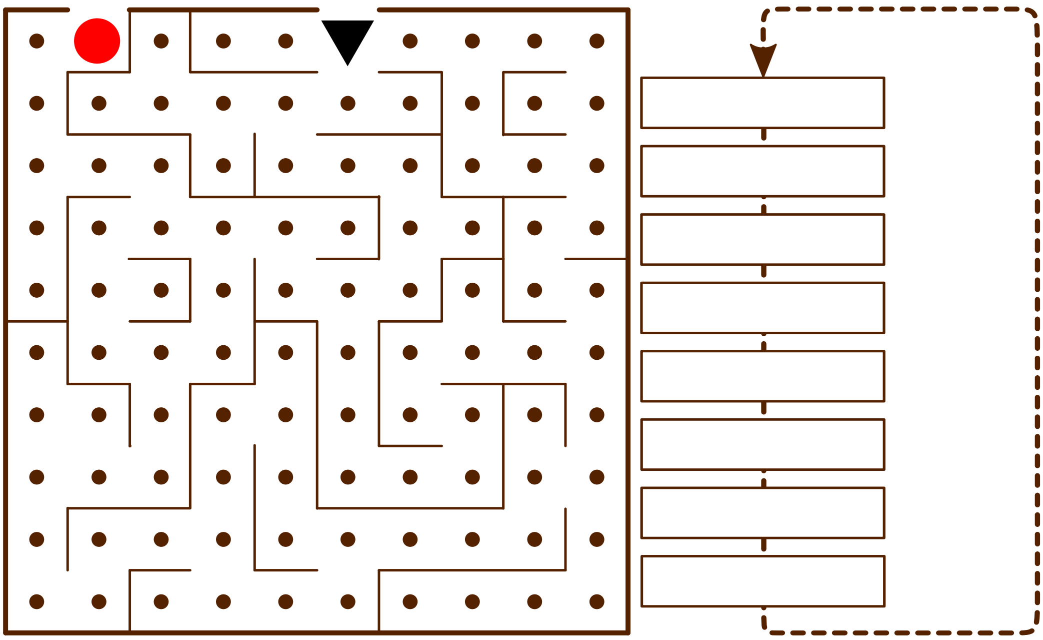
27. Wege durch den Irrgarten

Benj möchte durch einen Irrgarten gehen. Er bittet Dich, ihm zu sagen, wie er durch den Irrgarten gehen kann. Er betritt den Irrgarten beim schwarzen Dreieck und möchte den Ausgang beim roten Kreis erreichen. Benj kann sich aber nur acht der folgenden Schritte merken:

	Gehe einen Schritt geradeaus und drehe Dich dann nach links.
	Gehe einen Schritt geradeaus und drehe Dich dann nach rechts.
	Gehe einen Schritt geradeaus.

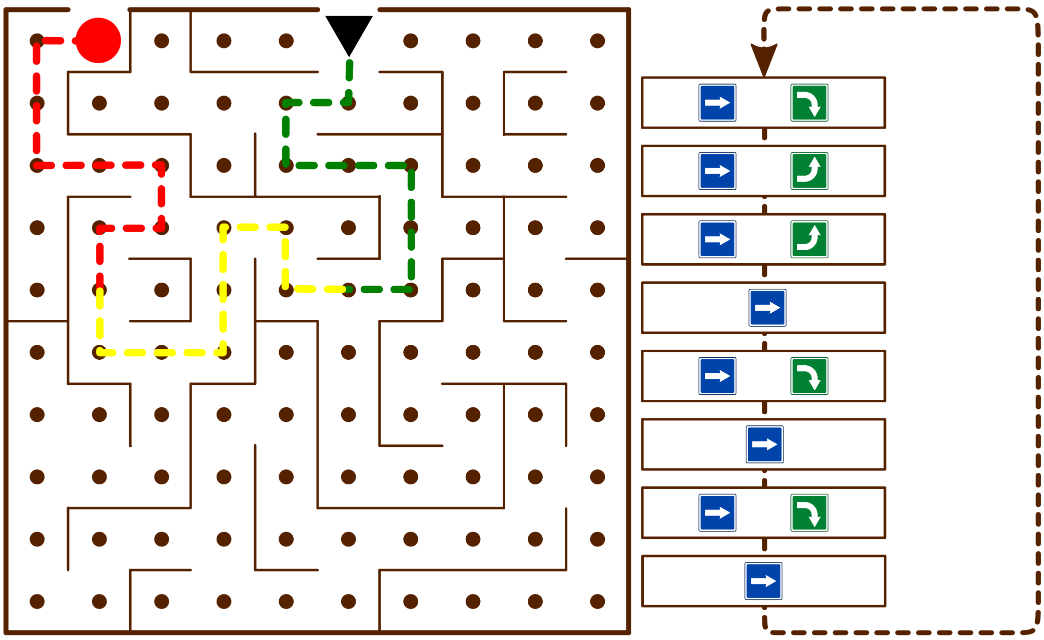
Auch wenn sich Benj nur acht Schritte merken kann, kann er diese acht Schritte wiederholt durchführen.

Am Anfang schaut Benj wie das schwarze Dreieck nach unten. Wähle die Schritte in der richtigen Reihenfolge für die leeren Felder, so dass Benj den Ausgang beim roten Punkt findet.



Lösung

Die folgende Abfolge von Befehlen führt zum Ausgang, wenn sie dreimal ausgeführt wird:



Dies ist Informatik!

Benj führt ein Programm aus. Dieses Programm besteht aus einer Abfolge von Befehlen („*Sequenz*"). Eine *Kontrollstruktur* wie die *Schleife* in diesem Programm erlaubt, dass eine Abfolge von Befehlen mehrfach hintereinander ausgeführt wird, so oft wie benötigt. So muss man nicht dieselbe Abfolge von Befehlen häufig hintereinander kopieren sondern spart sich Arbeit. Auch können Fehler im Programm so einfacher gefunden und korrigiert werden.

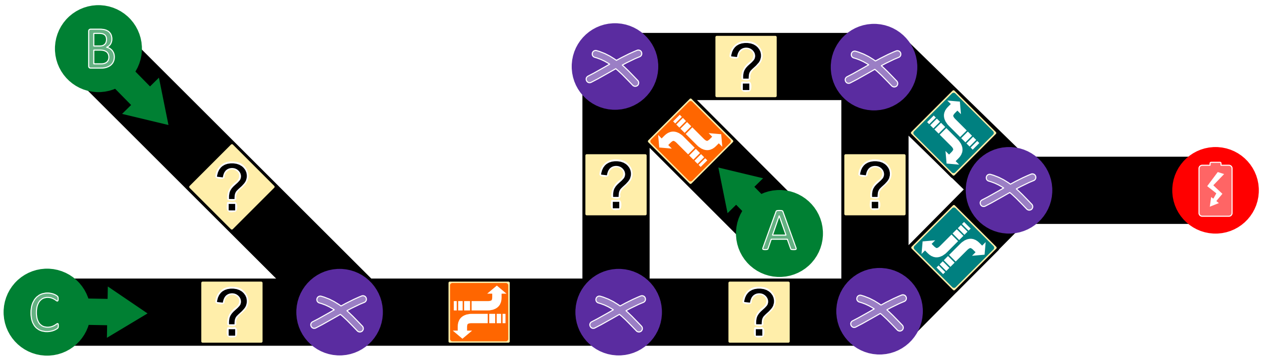
Webseiten und Stichwörter

Sequenz, Schleife, Algorithmus

- `https://de.wikipedia.org/wiki/Kontrollstruktur`

32. Hilf dem Arabot!

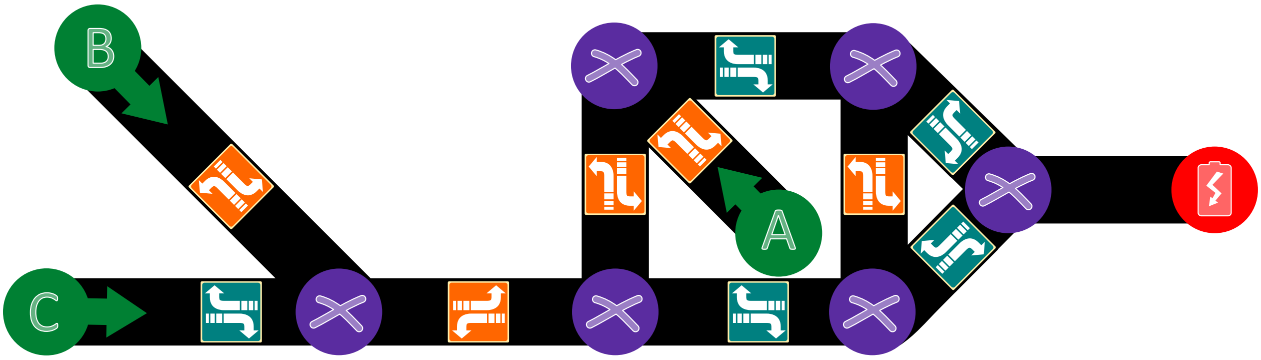
Ein Arabot ist ein Roboter, der auf einem Blatt Papier fährt. Er folgt immer den schwarzen Linien, die auf das Blatt Papier gezeichnet sind. Auf jeder Linie ist eine Beschriftung, die ihm sagt, ob er an der nächsten Kreuzung ( ) den ersten Weg von links ( ) oder den ersten Weg von rechts ( ) nehmen soll. Wenn er bei A, B oder C landet, weiss er nicht, was er machen soll, und schaltet sich aus. Der Arabot soll an A, B oder C starten können und soll immer bei der Ladestation ( ) enden. Jonas hat für seinen Roboter ein Blatt Papier bemalt. Einige der Beschriftungen hat er schon festgelegt, aber bei einigen weiss er nicht, was er wählen soll.



Hilf Jonas, die richtigen Beschriftungen für alle Linien zu finden.

Lösung

Die richtige Lösung ist:



Für die beiden Linien ganz links im Bild von B und C muss sichergestellt werden, dass der Arabot weiter nach rechts im Bild fahren kann, also muss er oben und unten wählen.
Im rechten Teil des Bildes ist die einzige Möglichkeit, zur Ladestation () zu fahren, wenn er die untere Linie von links her durchfährt. Im Quadrat in der Mitte des Bildes muss also für die rechte Linie gewählt werden, damit von oben her der Einstieg funktioniert. Ebenso muss man für die untere Linie im mittleren Teil des Bildes ein wählen.
Falls der Arabot diese beiden Linien in entgegengesetzter Richtung durchfährt, muss verhindert werden, dass er bei A landet, also muss im mittleren Teil des Bildes oben ein und links ein gewählt werden. Der Aufbau der Linien hat zur Folge, dass der Arabot dann letztlich wieder auf den rechten Teil des Bildes zurückfährt, so dass er auch in diesen Fällen an der Ladestation () landet.

Dies ist Informatik!

In dieser Aufgabe geht es darum, verschiedene mögliche Wege zu einem Ziel (A zu , B zu und C zu) in einer einzelnen beschrifteten Struktur (ein Graph in diesem Fall) zu kodieren. In der Informatik nennt man dies eine *Datenstruktur*. Wenn man einen Weg entlang geht (beispielsweise von A zu), muss der Arabot Schritt für Schritt die Anweisungen lesen und ausführen: „*In welche Richtung drehe ich mich an der nächsten Kreuzung? Wenn ich das weiss, gehe ich diesen Weg.*“ Ein Computer arbeitet auf der Ebene der Hardware ähnlich: Befehl lesen, ausführen und so weiter.
Hinter dieser Aufgabe stehen viele interessante mathematische und informatische Fragen, die damit zu tun haben, wie schwierig es ist, solche Beschriftungen korrekt und eindeutig festzulegen. Einige solcher Fragen sind bisher ungelöst und werden momentan von Informatikern im Fachgebiet der *Algorithmen* und der *Komplexitätstheorie* erforscht. Vergleichbare Aufgabenstellungen gibt es in den Bereichen der *Computational Biology* sowie der *Computational Medicine*.

Webseiten und Stichwörter

Bidirektionale Graphen, Komplexitätstheorie, Computational Biology, Computational Medicine

- `https://de.wikipedia.org/wiki/Komplexitätstheorie`
- `https://en.wikipedia.org/wiki/Computational_biology`
- `https://en.wikipedia.org/wiki/In_silico_medicine`

Christian Rohrbach

Algorithmen, Flussdiagramme und schwarze Löcher

Für (hoch-)begabte Mittelstufenlernpartner und neugierige Oberstufenklassen

Kopfrechentraining und das Üben der schriftlichen Subtraktion sind kein Luxus. Sollen die Übungen produktiv sein, d.h. auch etwas mathematisch-inhaltlich Bedeutsames aufzeigen, so sind solche Aufgaben nicht ganz einfach zu finden.

Mit den folgenden Arbeitsblättern sind folgende Zielsetzungen und Fragen angesprochen:

- Welchen Einfluss auf die Lösungsstrategie und das Vorgehen hat die Art und Weise, wie eine Aufgabe den Schülerinnen und Schülern präsentiert wird? Was bevorzugen sie selber?
- Im Kleinen sollen die Schüler und Schülerinnen Gelegenheit erhalten, selber zu «forschen» und zu «entdecken»; mit offenen Fragestellungen werden die zunächst gestellten Aufgaben aufgebrochen und ausgeweitet. Weitere Fragestellungen darüber hinaus sind möglich und können sich die Kinder selber ausdenken.
- Unerwartete und verblüffende Ergebnisse werden sich einstellen, z.T. sind die Probleme fachwissenschaftlich noch nicht gelöst. Die Einstellung und Haltung der Kinder über das, was Mathematik ist oder eben nicht ist, könnte durch solche Probleme im motivierend positiven Sinne beeinflusst werden.

Bei jeder der gestellten Aufgaben geht es um einen Algorithmus, also um einen «nach einem bestimmten Schema ablaufenden Rechenvorgang» (Duden). Die Algorithmen für die schriftlichen Operationen sind den Schülerinnen und Schülern seit der Mittelstufe bestens bekannt. Hier werden sie ganz andere Abläufe antreffen, bei denen sie zunächst nicht wissen (höchstens ahnen) können, wohin sie führen. Im bescheidenen Rahmen sind sie damit in die gleiche Situation versetzt wie ein mathematisch Forschender: Man probiert etwas aus, entdeckt eine bestimmte Regelmässigkeit, etwas Auffälliges und versucht danach zu erklären, zu verstehen, zu beweisen, warum das so ist.

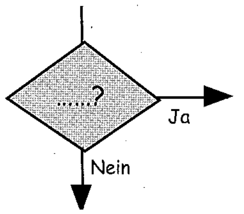
Verwendung der Arbeitsblätter

(Aufgaben 1 bis 6)

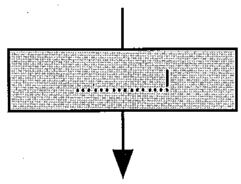
Die Arbeitsblätter enthalten je zwei Abschnitte. Auf die Resultate und mathematischen Hintergründe der Aufgaben wird weiter unten je einzeln eingegangen. Die Blätter können nach folgendem Phasenplan eingesetzt werden.

Voraussetzung:

Die Schüler und Schülerinnen kennen die Grafik eines Flussdiagrammes. Nötig ist lediglich, zwischen zwei grafischen Elementen zu unterscheiden:



Entscheidung
In diesem Kästchen steht eine Frage, die mit «Ja» oder «Nein» beantwortet werden kann. Der Antwort entsprechend wird das Kästchen verlassen.



Anweisung
Hier steht eine Aufforderung, etwas zu tun. Das Ergebnis der Handlung (meist einer Rechnung) wird dann im so genannten «Arbeitsspeicher» unter dem entsprechenden Buchstaben notiert. Dies wird mit dem Pfeil ➜ signalisiert.

Bei der Weiterarbeit wird immer mit der untersten, also zuletzt eingetragenen Zahl weitergearbeitet. Der «Arbeitsspeicher» kann etwa an den oder die Speicher in einem Taschenrechner erinnern, in die man ebenfalls Zahlen «ablegen» und wieder holen kann.

Die auf den Blättern vorhandenen gezeichneten «Arbeitsspeicher» sind lediglich als Vorlage gedacht für die Gestaltung im eigenen Heft oder auf dem eigenen Blatt Papier, denn sie werden beim Lösen der Aufgaben platzmässig nicht ausreichen.

Ohne es jeweils zu erwähnen, wird bei allen Aufgaben nur im Zahlenraum der natürlichen Zahlen $\mathbf{N}_0$ gearbeitet. Mit z.B. «Wähle eine Zahl» ist also immer eine natürliche Zahl gemeint.

Phase 1:

Vom ersten Arbeitsblatt bearbeitet die eine Hälfte der Klasse den oberen Teil «Schritt für Schritt», die andere den unteren, das «Flussdiagramm». Anschliessend stellen sich die Schüler und Schülerinnen gegenseitig ihre Ergebnisse vor. Sie werden feststellen, dass die Resultate übereinstimmen. Es lohnt sich dann, auf der Metaebene ein Gespräch zu führen über die Art und Weise, wie jede und jeder Einzelne Aufgaben löst und welchen Einfluss die Präsentationsart auf das Lösungsverhalten und die persönliche Einstellung zur Aufgabe hat.

Phase 2:

Die Probleme «Ziffern und Zahlen», «Ungelöstes Problem» und «Knapp 100» können arbeitsteilig in kleinen Gruppen angegangen werden. Nach der Arbeit stellen sich die Gruppen gegenseitig ihre Resultate vor. Die Lehrkraft kann ergänzende Anmerkungen mache (siehe dazu die Hinweise weiter unten).

Phase 3:
Wiederum in Gruppen wird die abschliessende Aufgabe «Schwarze Löcher» angegangen. In einem Klassengespräch wird das Thema ausgewertet und die Arbeit abgeschlossen.

Nun zu den Problemen oder Aufgaben im Einzelnen.

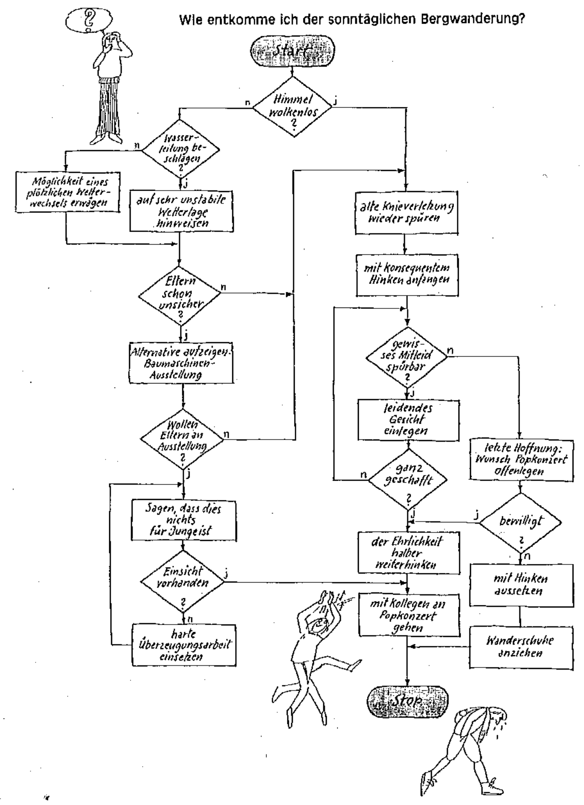
Aus Taschenrechner, Interkantonale Lehrmittelzentrale, Lehrmittelverlag des Kantons Zürich, 1995

«Schritt für Schritt» und «Flussdiagramm»

(Aufgaben 1 und 2)

Beide Teile dieses Arbeitsblattes enthalten die genau gleichen Aufgaben. Sie wurden übernommen, ergänzt, leicht umformuliert und textlich angepasst aus den beiden Lehrmitteln «Mathematik 5» («Schritt für Schritt») und «Mathematik 8» («Flussdiagramm»).

Flussdiagramme dürfen auch lustig sein



Aus INFORMATIK, Interkantonale Lehrmittelzentrale, Lehrmittelverlag des Kantons Zürich, 1986

Der grosse Unterschied ist auf den ersten Blick ersichtlich: Während oben der Algorithmus in fünf sprachlichen Anweisungen enthalten ist, wird er unten in der Form eines Flussdiagramms präsentiert. Der sich permanent wiederholende Prozess wird durch die im Flussdiagramm deutlich gezeigte Schleifenstruktur visualisiert.

Unter «Schritt für Schritt» heisst es: «... wirst du etwas merken.» Das ist die Frage nach dem Abbruchkriterium, das unten im Flussdiagramm im Kasten mit «...?» offen gelassen ist.

Es macht natürlich wenig Sinn, wenn sich alle Schüler und Schülerinnen mit beiden Aufgaben auf diesem Arbeitsblatt beschäftigen. Aber spannend für sie und die Lehrkraft wird es sein, wenn nach der arbeitsteiligen Bearbeitung nicht nur die Resultate verglichen werden, sondern auch über die Arbeitsweise gesprochen wird: Welche Art der Präsentation der Aufgaben führte zu welchen Verständnisschwierigkeiten? Welche wird von den Schülerinnen und Schüler warum bevorzugt? Gibt es Unterschiede, wie Sprachschwache und -starke auf diese zwei Formen ansprechen?

In der heutigen auf visuelle Präsentation ausgerichteten Kommunikationskultur darf die Chance nicht verpasst werden, auch im Mathematikunterricht eine grafisch orientierte Art der Aufgabenpräsentation, wo es möglich und sinnvoll ist, zu pflegen – ganz abgesehen davon, dass die textlichen Kurzformen, wie sie z.B. in den Flussdiagramm-Kästchen vorkommen, den sprachlich eher schwachen Kindern engegenkommen. Einsicht in den sich mehrfach wiederholenden Ablaufprozess bietet das Flussdiagramm auf eindrückliche Weise; nicht jeder beliebige Algorithmus muss auch zwingend zu einem Ende kommen; hier haben wir es jeweils mit einer Art «Glücksfall» zu tun. Darum werden die folgenden Algorithmen mit Flussdiagrammen präsentiert; sie stammen aus den Büchern «Mathematik 7 und 8» (siehe Quellen) und sind leicht modifiziert und angepasst worden.

Erkundungsresultate bei «Schritt für Schritt» und «Flussdiagramm»:

Abgesehen von den hier uninteressanten so genannten «Schnapszahlen» (Zahlen, die aus lauter gleichen Ziffern bestehen, also 1111, 2222, 3333, 4444, 5555, 6666, 7777, 8888 und 9999), bei denen offensichtlich bereits nach dem ersten Durchgang im Algorithmus 0 herauskommt, führen alle Zahlen spätestens nach sieben Schritten auf die Zahl 6174. Unterwirft man diese Zahl den Algorithmusanweisungen, so ergibt sich:

$$\begin{array}{r} 7641 \\ -1467 \\ \hline 6174 \end{array}$$

Und dabei bleibt es; m.a.W. man kommt nicht mehr weg von 6174.

Dieses Phänomen wurde 1949 vom indischen Mathematiker Dattatreya R. Kaprekar (1905–1986) entdeckt und seither heisst 6174 auch Kaprekar-Konstante. Die Zahlentheoretiker haben sich eingehend mit diesem Algorithmus beschäftigt und ihn in verschiedenen Zahlsystemen und mit unterschiedlichstelligen natürlichen Zahlen untersucht.

Bei den vierstelligen Zahlen im Zehnersystem ist bald ersichtlich, dass bei den grössten resp. kleinsten gebildeten Zahlen die beiden Differenzen zwischen erster und vierter sowie zwischen den beiden mittleren Zahlen entscheidend sind für den Verlauf des Algorithmus.

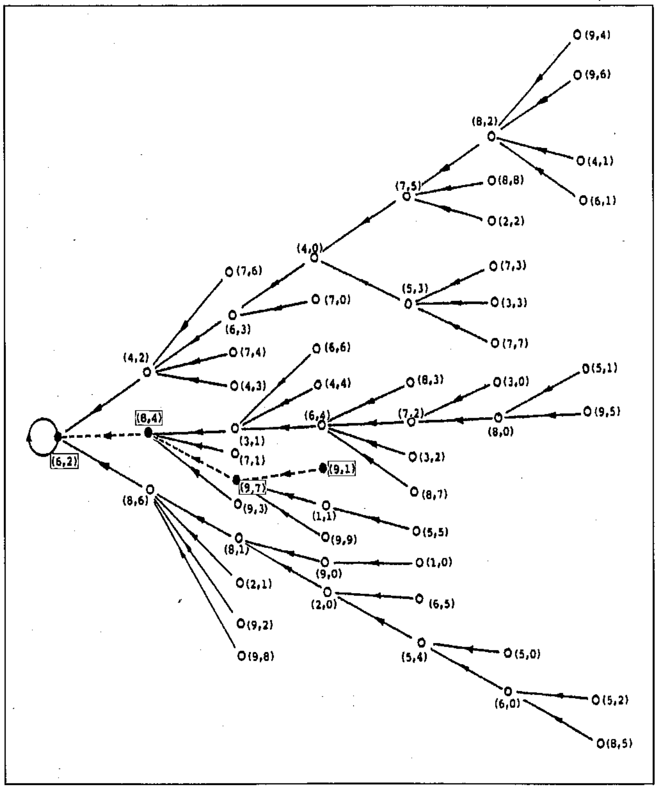
Z.B.:

7906 →	9760	9810	9621	8532	7641
	0679	0189	1269	2358	1467
	9081	9621	8352	6174	6174
Differenzen:	(9,1)	(9,7)	(8,4)	(6,2)	(6,2)

$\boxed{9}\boxed{7}\,\boxed{6}\,0$

Durch Überprüfung und Verfolgung aller möglichen Fälle, etwa mit Hilfe eines Computerprogramms, erhält man den folgenden Grafen, der zeigt, wie man von irgendeiner beliebigen vierstelligen Zahl ausgehend zu 6174 gelangt. Dabei sind nur die oben beschriebenen Differenzen, auf die es ja ankommt, notiert.

Im obigen Beispiel hat der Algorithmus den gestrichelt markierten Verlauf genommen.



Eine tief greifende mathematische Analyse dieses Kaprekar-Verfahrens ist wohl für Schülerinnen und Schüler der Sekundarstufe I kaum möglich. Das Interesse dürfte aber durch das erstaunliche Ergebnis dennoch so weit geweckt sein, dass sie bereit sein werden, die Vorgaben im echten «Forschersinne» zu variieren: Dazu in beiden Versionen die Frage 4, mit der Aufforderung, die Startbedingung zu ändern.

Hier wird sich herausstellen, dass dreistellige Nicht-Schnapszahlen immer auf 495 führen. (Man könnte natürlich dreistellige Zahlen durch Hinzufügen einer führenden Null zu vierstelligen machen: 236 → 0236 und hätte damit den bekannten Verlauf des Algorithmus mit der Kaprekar-Konstanten 6174.)

Fünfstellige Zahlen führen nicht zu einer einzigen Zahl, sondern zu Zyklen von mehreren Zahlen, die sich wiederholen.

«Ziffern und Zahlen» (Aufgabe 3)

Wiederum ist das Abbruchkriterium, der Ausstieg aus der Schleife des Algorithmus, offen gelassen. Die Schülerinnen und Schüler werden nach wenigen Versuchen sicher selber entdecken, dass

- die Zahl 123 sich im Sinne des Algorithmus selber beschreibt: Sie enthält genau 1 gerade Ziffer, 2 ungerade und total 3 Ziffern.
- alle mindestens dreistelligen Zahlen, wie lange sie auch sind, immer kürzer und früher oder später auf 123 reduziert, also von 123 quasi «magisch angezogen» werden.

Nimmt man beispielsweise eine Zahl mit mindestens 10, aber höchstens 99 Stellen, so wird daraus nach dem ersten Durchgang eine höchstens sechsstellige Zahl mit höchstens je zwei Stellen für die Zahl der geraden, ungeraden und aller Ziffern. Aus dieser höchstens sechsstelligen Zahl wird dann im nächsten Durchgang eine dreistellige Zahl. Und dreistellige Zahlen führen im nächsten Schritt auf einen dieser vier Fälle:

G	U	Z
3	0	3
2	1	3
1	2	3
0	3	3

Wie man sich leicht überzeugt, entsteht in allen vier Fällen daraus dann sofort die (magische?) Zahl 123.

Auch ein- oder zweistellige Zahlen können durchaus mit einbezogen werden:

- entweder ergänzt man sie mit führenden Nullen und zählt diese Ziffer(n) zu den geraden
- oder man arbeitet ohne diesen «Trick» und muss dafür u.U. ein paar Schleifendurchgänge mehr in Kauf nehmen. Das zeigt sich schon im oben aufgeführten Fall 033:
  Wird mit 33 weitergearbeitet, so führt das nicht sofort auf 123, sondern auf 22, dann weiter auf 202, 303 und endlich auch wiederum auf 123.

«Ungelöstes Problem» (Aufgabe 4)

Hier ist das Ausstiegskriterium aus der Schleife des Algorithmus gegeben: A = 1.

Der Prozess würde mit 1 auch gar nicht aufhören, sondern in einer Schleife immer weiterlaufen: 1 führt auf 4 über 2 wieder zu 1. Man könnte den Algorithmus allerdings leicht modifizieren, sodass er immer definitiv bei 4 endet.

Kommt man mit dem Algorithmus immer und mit jeder beliebigen Zahl irgendwann mal auf 1? Diese Frage wurde in den Dreissigerjahren des letzten Jahrhunderts aufgeworfen und ist bis heute nicht beantwortet. Ein ungelöstes Problem in der Mathematik – eines, das jedermann verstehen und nachvollziehen kann, da man ja lediglich ganz einfache Operationen durchführen muss und nur der Begriff «gerade Zahl» bekannt sein sollte. Eine Paradebeispiel also, um auch Schülern und

Schülerinnen zu zeigen, dass entgegen vielfacher Vorstellung die Mathematik keine «endgültig fertige» Wissenschaft ist, dass es sogar ganz einfache Fragen gibt, auf die die Fachwissenschaft keine Antwort weiss.

Übrigens:

- Der Tipp in der Aufgabenstellung ist durchaus angebracht; mit 27 als Startzahl benötigt man sehr viele, nämlich 112 Schritte, bis man endlich die Zahl 1 erreicht. Aber wer weiss, vielleicht ist gerade das für gewisse Kinder eine echte Herausforderung.
- Werden die Protokolle im Arbeitsspeicher genau beobachtet, sieht man bald, dass gewisse Zahlen nach einem eigenen Anfangsabschnitt in der Folge dann auf ein Protokoll einer bereits bearbeiten Zahl «einschwenken»; damit kann man sich viel Arbeit sparen – sofern man es merkt; eine gute Gelegenheit, die einzelnen Schüler und Schülerinnen in Bezug auf ihre Fähigkeiten etwas genauer zu beobachten.

Zum Beispiel:

15, 46, 23, 70, 35, 106, 53, 160, 80 → 40

7, 22, 11, 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1

42, 21, 64, 32 → 16

«Knapp 100» (Aufgabe 5)

Die angesprochenen zwei Fälle werden nach ein paar Versuchen von den Schülern und Schülerinnen sicher bald erkannt:

- Palindromische Zahlen, auch «Spiegelzahlen» genannt, die gleich lauten, ob man sie nun von links nach rechts oder von rechts nach links liest, führen sofort auf die Zahl 0.
- Alle anderen dreistelligen Zahlen führen nach wenigen Schritten auf die Zahl 99. Danach könnte noch ein weiterer Schritt angehängt werden, um wiederum 0 zu erreichen.

Das Flussdiagramm könnte man vereinfachen, wenn den Schülerinnen und Schüler der Begriff des Absolutbetrages bekannt ist. Die Fallunterscheidung, damit beim Subtrahieren keine negativen Zahlen entstehen, wäre dann nicht nötig; die folgende Anweisung statt der drei Kästchen in der Mitte der Schleife würde genügen:

$$\boxed{|A - B| \rightarrow D}$$

Wer hinter die mathematischen Kulissen dieses Algorithmus schaut, entdeckt bald, dass nach dem ersten Durchlauf die erste Differenz also entweder 0 oder ein Vielfaches von 99 ist. Für den zweiten Fall gelten die folgenden Überlegungen.

Nennt man die dreistellige Startzahl z, so lässt sie sich so schreiben:

$z = a \cdot 10^2 + b \cdot 10^1 + c \cdot 10^0$, wobei a, b und c Ziffern sind und zusätzlich $a \neq 0$ ist.

Subtrahiert wird nun: $c \cdot 10^2 + b \cdot 10^1 + a \cdot 10^0$, wobei man ohne Einschränkung annehmen darf, dass $a > c$ ist.

Die Differenz lautet dann: $(a - c) \cdot (10^2 - 10^0) = (a - c) \cdot 99$, also ein Vielfaches von 99.

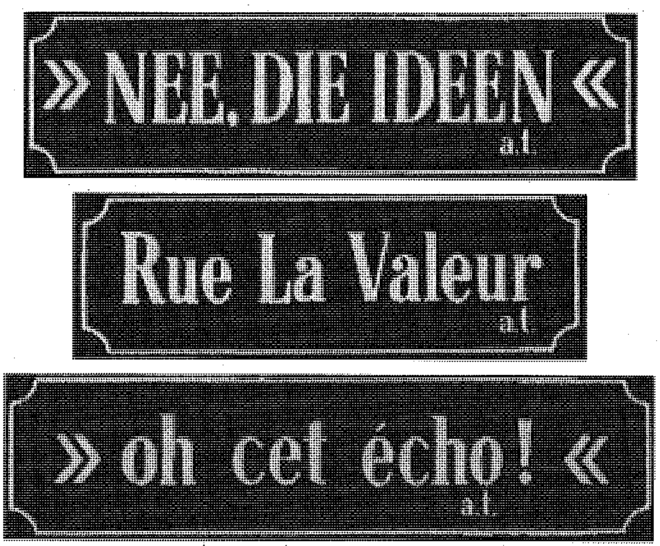
Die acht dreistelligen Vielfachen von 99 können einander paarweise zugeordnet werden; eine entspricht rückwärts gelesen der anderen:

$198 \leftrightarrow 891$
$396 \leftrightarrow 693$
$297 \leftrightarrow 792$
$495 \leftrightarrow 594$

Deren Differenz ist demzufolge wiederum ein Vielfaches von 99, und man sieht, dass man jeweils einfach quasi eine Zeile tiefer «rutscht». Die untersten beiden Zahlen haben die Differenz 99 und damit ist der Algorithmus zu Ende.

Im Gegensatz zum «Ungelösten Problem» ist dieser Algorithmus beweisbar, wie die Argumentation oben zeigt. Können auch Schülerinnen und Schüler diese Begründung nachvollziehen oder vielleicht sogar selber in ähnlicher Form entwickeln? Benötigt wird nicht viel mehr als etwas Einsicht in den Aufbau des dezimalen Stellenwertsystems unserer Zahlnotation und allenfalls etwas Algebra und Potenzrechnen, sofern verallgemeinert argumentiert werden soll.

Die zweite Frage zielt dann über die Mathematik hinaus, geht es doch um Palindrome, also Worte, die man auch rück-



Der Schweizer Wort- und Bildkünstler André Thomkins (1930–1985) war berühmt für seine Palindrome. Im Kunsthaus Luzern sind seine Strassenschilder ausgestellt.
Palindrome, wie: «Ein Neger mit Gazelle zagt im Regen nie.» lassen sich rückwärts lesen. Wo finden die Jugendlichen im Internet und in der Literatur noch weitere Wörter oder Sätze zum vor- und rückwärts lesen?

wärts lesen kann. Dabei kann unterschieden werden, ob das Wort von rechts her gelesen den gleichen oder einen anderen Sinn ergibt:

RELIEFPFEILER respektive LEBEN – NEBEL.

Nur Zahlen, die die palindromische Eigenschaft der ersten Art aufweisen, sind natürlich von Interesse. Sie führen ja im Algorithmus sofort auf die Zahl 0. (Alle Zahlen sind im Sinne der zweiten Art palindromisch.)

Palindrome (der ersten Art) weisen eine Art Symmetrie auf, die aber von anderer, abstrakterer Art ist als die den Schülern und Schülerinnen bekannte Achsensymmetrie aus der Geometrie. Aber auch diese kann auftreten, wie die Beispiele

OTTO und UHU (nicht aber ANNA)

zeigen.

Mit der Suche nach palindromischen Sätzen – dazu gibt es Sammlungen – kann das Thema leicht in sprachlicher Richtung ausgeweitet werden.

«Schwarze Löcher» (Aufgabe 6)

Diese kaum mehr vorstellbaren astronomischen Objekte beflügeln die Fantasie; kaum ein Weltraum-Sciencefiction-Film kommt ohne sie aus.

Ein schwarzes Loch ist «ein Körper, der so stark zusammengedrängt ist, dass er sogar sein eigenes Licht gefangen hält. Ein schwarzes Loch entsteht, wenn sich ein zusammenfallender Stern oder ein anderer Körper in ein Gravitationsfeld verwickelt, das stark genug ist, um nur Teilchen hinauszulassen, die schneller sind als das Licht. Obwohl der Ausdruck romantische Vorstellungen von ‹Löchern im Raum› weckt, ist ein schwarzes Loch im Grunde eine recht gewichtige Sache.» (Ferris, 1982)

Schwarze Löcher werden im Kapitel «Das Ende eines Sterns» im Arbeitsheft «Sternkunde» (Eggmann, 98) so beschrieben:

Für eine sterbende Sonne «... gibt es zwei Möglichkeiten:

1. Sie bleibt ein leuchtender kleiner Stern, der weiterhin beobachtbar ist. Wenn ihre Materie aber sehr dicht zusammenstürzt, wird ihre Gravitation derart riesig, dass sie sogar ihr eigenes Licht anzieht und verschluckt. Auch Licht und Radiowellen der Umgebung werden von ihr abgelenkt oder sogar aufgenommen. Sie wirkt wie ein kosmischer Staubsauger, der alles verschluckt. Sie ist zu einem schwarzen Loch geworden. Schwarze Löcher sind demnach keine Löcher im All, sondern Himmelsobjekte, deren Masse und Dichte ungeheuer gross, deren Ausdehnung aber relativ klein ist. Ein Fingerhut voll der Materie eines schwarzen Loches wiegt mehrere tausend Tonnen. Was immer in seinen Anziehungsbereich gerät, wird auf den erloschenen Stern niederstürzen und für immer von ihm festgehalten werden.
2. Sterne können aber auch ein anderes Ende nehmen: Sie explodieren. Man nennt das Supernova. Ihre Materie wirbelt dann als Gas- und Staubwolke durch die Galaxie. Schliesslich verbindet sie sich mit weiterer interstellarer Materie. Sie beginnt sich erneut zu verdichten und formt als rotierende Gasscheibe eine neue Sonne, eventuell mit Planeten und Monden.»

Bei den in diesem Abschnitt gestellten Aufgaben geht es darum, dass die Schülerinnen und Schüler selber Informationen über schwarze Löcher mit Hilfe von astronomischer Literatur, Lexika oder dem Internet zusammentragen sollen und den Bezug zu den mathematischen Algorithmen suchen: Es gibt Zahlen im Zahlenuniversum, die sich bei der Anwendung bestimmter Algorithmen wie schwarze Löcher verhalten, d.h., mit welcher Zahl man auch startet, immer endet man am Schluss bei der betreffenden Zahl und kommt nicht mehr davon weg.

In den hier vorgestellten Beispielen treten folgende schwarzen (Zahlen-)Löcher auf:

- «Schritt für Schritt» resp.
- «Flussdiagramm»: 6174 (Ausnahmen sind die Schnapszahlen)
- «Ziffern und Zahlen»: 123
- «Ungelöstes Problem»: 1 (In der hier vorgestellten Version des Algorithmus eigentlich eine Endlosschleife)
- «Knapp 100»: 99 (respektive 0) («Unechte» Ausnahmen sind die palindromischen Zahlen, die auf 0 führen, denn wird ein weiterer Durchgang durch das Flussdiagramm gemacht, so führt auch 99 auf die Zahl 0.)

Es gibt weitere Algorithmen in der Mathematik, die auf schwarze Löcher führen; dazu sei auf die Literatur verwiesen.

Christian Rohrbach

Quellen:

- Mathematik 5, Lehrmittelverlag des Kantons Zürich, 1998; ISBN 3-906719-66-9; Seite 80
- Mathematik 8, Lehrmittelverlag des Kantons Zürich, 2001³; ISBN 3-906719-43-X; Seite 88
- Mathematik 8, Lehrmittelverlag des Kantons Zürich, 2001³; ISBN 3-906719-43-X; Seite 87
- Mathematik 7, Lehrmittelverlag des Kantons Zürich, 1999³; ISBN 3-906718-76-X; Seite 154
- Mathematik 7, Lehrmittelverlag des Kantons Zürich, 1999³; ISBN 3-906718-76-X; Seite 109
- M. Erni, Ch. Rohrbach, Wie ein Computer funktioniert, Lehrmittelverlag des Kt. ZH, 1989²
- François Fricker, Nachfrage (früher Mathemagisches), Das Magazin («Tages Anzeiger»), Nr. 3/94, 25/94, 50/95, 40/96, 44/99, 17/00, 20/00
- Michael Ecker, Vorsicht: Schwarze Löcher lauern überall, «Tages Anzeiger», 17.2.1993
- Timothy Ferris, Die rote Grenze, Auf der Suche nach dem Rand des Universums, Birkhäuser, Basel 1982, ISBN 3-7643-1331-5
- Heinz Eggmann, Thema: Sternkunde, Kant. Lehrmittelverlag St. Gallen, Rorschach, Nr. 3, 22. Jahrgang, Sept. 98

Aufgabe 1: Schritt für Schritt

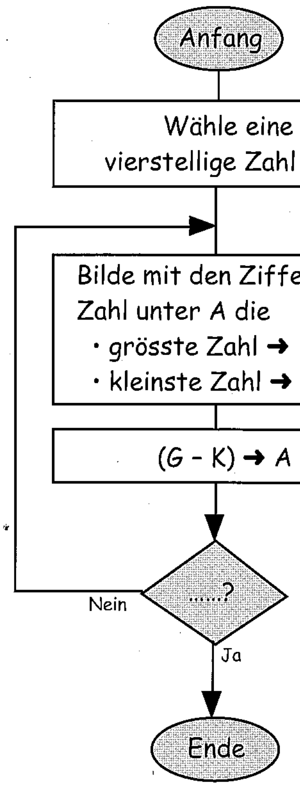
1. • Wähle eine vierstellige Zahl, die nicht aus lauter gleichen Ziffern besteht.
   • Bilde mit den vier Ziffern dieser Zahl die grösste und die kleinste mögliche Zahl.
   • Rechne den Unterschied der beiden Zahlen aus.
   • Bilde mit den ~~fünf~~ Ziffern der ausgerechneten Differenz wieder die grösste und die kleinste mögliche Zahl. Rechne wiederum ihren Unterschied aus. H 4
   • Fahre so weiter. Nach einigen Schritten wirst du etwas merken.

2. Nimm weitere vierstellige Zahlen und rechne in der gleichen Weise wie in Aufgabe 1. Vergleiche deine Rechnungen mit denjenigen deiner Mitschüler und Mitschülerinnen. Was stellst du fest?

3. «Schnapszahlen» sind Zahlen, die aus lauter gleichen Ziffern bestehen.
   Was beobachtest du, wenn du die Aufgabe 1 (entgegen der Anleitung) mit einer Schnapszahl löst?

4. Was stellst du fest, wenn du statt vierstellige Zahlen dreistellige nimmst; was passiert, wenn du fünfstellige Zahlen wählst?

Aufgabe 2: Flussdiagramm



Im Flussdiagramm bedeutet das Zeichen « ➜ ☆ » «trage die Zahl im Arbeitsspeicher in der Spalte unter ☆ ein».

1. «Schnapszahlen» sind Zahlen, die aus lauter gleichen Ziffern bestehen.
   Wähle zuerst einmal keine Schnapszahl und löse damit die Aufgabe aus dem Flussdiagramm. Welche Frage passt wohl statt «......?» ins unterste Kästchen des Flussdiagramms?

2. Löse die Aufgabe mehrmals mit verschiedenen vierstelligen Zahlen und überprüfe deine Vermutung. Vergleiche auch mit deinen Mitschülerinnen und Mitschülern.

3. Was stellst du fest, wenn du die Aufgabe (entgegen der Anleitung in 1.) mit einer Schnapszahl löst?

4. Was kommt heraus, wenn du statt vierstellige nur dreistellige Zahlen nimmst?
   Und wenn du fünfstellige Zahlen wählst?

Arbeitsspeicher

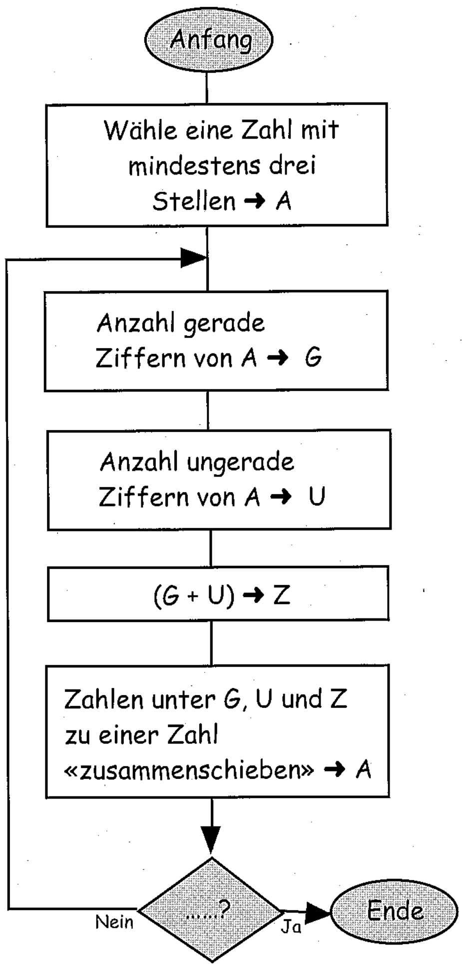
A	G	K

Aufgabe 3: Ziffern und Zahlen

1. Im zweituntersten Kästchen des Flussdiagramms steht, du sollst Zahlen «zusammenschieben».
   Das geht so:
   Die drei Zahlen 12, 5 und 4 zum Beispiel zusammengeschoben ergeben die Zahl 1254.
   Alles klar?
   Löse die Aufgabe aus dem Flussdiagramm mit verschiedenen Zahlen.
   Was würdest du im untersten Kästchen eintragen?

2. Probiere es auch mit einer «Riesenzahl», einer mit z.B. 20 oder noch mehr Stellen.

3. Geht das Verfahren nicht auch mit einstelligen oder zweistelligen Zahlen am Anfang?

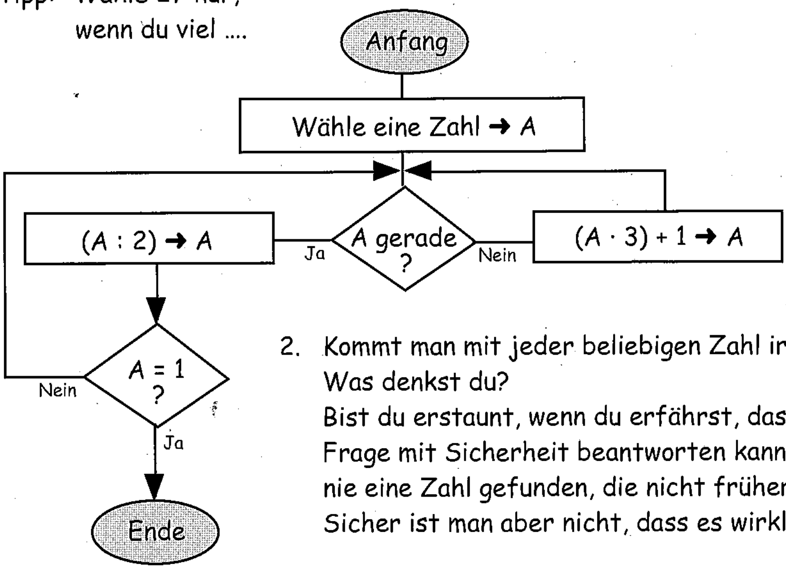


Arbeitsspeicher

A	G	U	Z

Aufgabe 4: Ungelöstes Problem

1. Löse die Aufgabe aus dem Flussdiagramm mit verschiedenen Zahlen.
   Tipp: Wähle 27 nur,
   wenn du viel ....



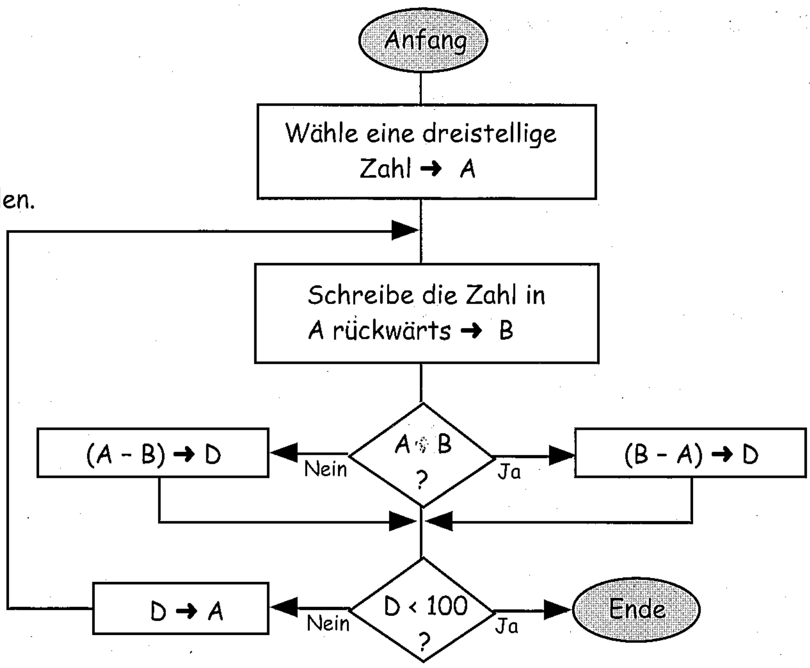
Arbeitsspeicher

A

2. Kommt man mit jeder beliebigen Zahl irgend einmal auf 1, also zum Ende?
   Was denkst du?
   Bist du erstaunt, wenn du erfährst, dass bis heute noch niemand diese Frage mit Sicherheit beantworten kann? Das heisst, man hat bis jetzt noch nie eine Zahl gefunden, die nicht früher oder später auf 1 geführt hätte. Sicher ist man aber nicht, dass es wirklich bei allen Zahlen so verläuft!

Aufgabe 5: Knapp 100

1. Löse die Aufgabe, die das Flussdiagramm aufzeigt, mit mehreren verschiedenen Zahlen.
   Es gibt zwei verschiedene Fälle, wie du zum Ende gelangst.
   Nämlich?



2. Die Zahlen beim einen der zwei Fälle zeigen etwas Ähnliches wie die folgenden Wörter:

   ANNA
   OTTO
   UHU

   Welchen Zusammenhang siehst du?

   Kennst du weitere solche Wörter?

Arbeitsspeicher

A	B	D

Aufgabe 6: Schwarze Löcher

1. Was weisst du über die so genannten schwarzen Löcher?
   Suche in einem Lexikon oder im Internet nach diesem Begriff aus der Astronomie.
   http://www.astronomie.de/ ist eine günstige Adresse zum Starten im Internet.
   Schreibe einen kurzen Text, in dem du den Begriff erklärst und die wichtigsten Eigenschaften eines schwarzen Loches erwähnst.

2. Was ist deiner Meinung nach der Zusammenhang zwischen den Mathematikaufgaben «Schritt für Schritt», «Flussdiagramm», «Ziffern und Zahlen», «Ungelöstes Problem», «Knapp 100» und den schwarzen Löchern in der Astronomie?