Erwachsene

- Von A nach C
- Freunde-Fotos
- Der Magier
- Effizient kochen
- Pfützenspringen
- Fussspuren
- Treffpunkt
- Gipfestürmer
- Bunte Perlenkette
- Richtige Rechtecke?
- Nachricht aus Bibirien
- Algorithmen, Flussdiagramme und Schwarze Löcher

36. Von A nach C (SJ 9/10, 11-13)

Du hast einen kleinen Roboter, der kann diese Befehle ausführen:

V	einen Schritt vorwärts gehen
L (Winkel)	Linksdrehung, die Grösse des Winkels steht in den Klammern
R (Winkel)	Rechtsdrehung, die Grösse des Winkels steht in den Klammern

Zu Beginn steht der kleine Roboter immer am Punkt A. Er ist nach rechts ausgerichtet und wartet auf sein Programm.

Soll der kleine Roboter mehrere Befehle hintereinander ausführen, werden sie mit + aneinander gereiht. Zum Beispiel bedeutet das Programm V+L(20)+V+R(2), der Roboter soll einen Schritt vorwärts gehen, sich dann 20° nach links drehen, dann einen Schritt vorwärts gehen und sich abschliessend 2° nach rechts drehen.

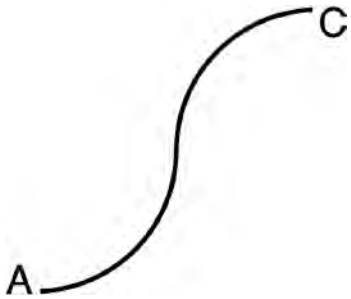
Soll der kleine Roboter etwas mehrmals tun, wird das mit * ausgedrückt.

Zum Beispiel bedeutet das Programm 180*(V+L(1)),

dass er 180 mal nacheinander die zwei Befehle V und L(1) ausführen soll.

Das Bild zeigt ungefähr seinen Weg von A nach B:

Mit welchem Programm geht der kleine Roboter ungefähr diesen Weg von A nach C?



A. 90*(V+L(1)+V+R(1))

B. 90*(V+L(1))+90*(V+R(1))

C. 90*(V+L(1))+R(30)+90*(V+R(1))

D. L(90)+90*(V+L(1))+R(90)+90*(V+R(1))

Lösung:

Antwort B ist richtig:

Mit 90*(V+L(1)) geht der kleine Roboter ungefähr einen Viertelkreis nach links und dann

mit 90*(V+R(1)) ungefähr einen Viertelkreis nach rechts.

Mit Programm A läuft der kleine Roboter ungefähr einen direkten Weg von A nach C.

Beim Programm C führt das Programmmstück R(30) zu einer Abweichung vom Weg, Punkt C wird vom kleinen Roboter nicht erreicht.

Beim Programm D führt der erste Befehl L(90) dazu, dass der kleine Roboter nicht nach rechts losläuft, sondern nach oben.

Stufen	3-4	Leicht	Mittel	Schwer
Stufen	5-6	Leicht	Mittel	Schwer
Stufen	7-8	Leicht	Mittel	Schwer
Stufen	**9-10**	Leicht	Mittel	**Schwer**
Stufen	**11-13**	Leicht	**Mittel**	Schwer

DAS IST INFORMATIK!

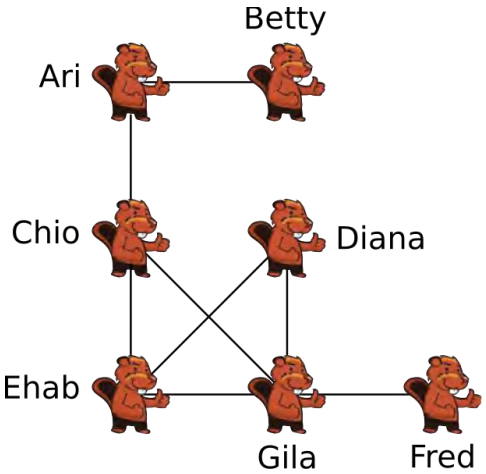
Der Roboter startet in einem Anfangszustand (Position A, Blickrichtung B) und führt Programmbefehle aus, bis er das Ende des Codes erreicht. Gibt man die richtige Codesequenz an, ist es möglich, den Roboter vom Startpunkt zum Ziel zu bringen. Ein einziger falscher Befehl im gesamten Code kann den Roboter in die falsche Richtung führen.

http://www.landrat-lucas.de/mint/logo/logo_1.pdf

http://de.wikipedia.org/wiki/Logo_(Programmiersprache)

5 Freunde-Fotos

Sieben Biber haben sich in einem Online-Netzwerk registriert. Das Bild zeigt, welche Biber in diesem Netzwerk „Freunde“ sind: Freunde sind mit einer Linie verbunden.
Nach den Sommerferien teilt jeder Biber ein Ferienfoto von sich mit seinen Freunden im Netzwerk. So erscheint das Foto auf den Seiten der Freunde.
Jeder Biber sieht die Fotos auf seiner eigenen Seite und die Fotos auf den Seiten seiner Freunde.



Wessen Ferienfoto können die meisten anderen Biber sehen?

A) Ari

B) Chio

C) Ehab

D) Gila

Lösung

Die richtige Antwort ist Chio.

Jedes Ferienfoto ist auf den Seiten der Freunde zu sehen. Deshalb können es die Freunde selbst und ausserdem deren Freunde sehen.

Um den Biber zu finden, dessen Foto am häufigsten zu sehen ist, muss für jeden Biber X die Anzahl der Freunde und die Anzahl der Freunde der Freunde ermittelt werden. Das entspricht der Anzahl der Biber, die im Bild von X aus über maximal zwei Linien erreicht werden können. Dabei darf jeder Biber nur ein Mal gezählt werden, und X selbst zählt nicht mit.

Die folgende Tabelle zeigt die Namen der Biber, welche ein Bild von sich posten, deren Freunde und wiederum deren Freunde. Gila hat zwar am meisten Freunde, aber die sind fast alle nur untereinander befreundet. Chio hingegen kann auch andere Biber erreichen.

Biber	Freunde	Freunde der Freunde (noch nicht zuvor genannte)	Anzahl erreichter Biber insgesamt
Ari	Betty, Chio	Ehab, Gila	4
Betty	Ari	Chio	2
Chio	Ari, Ehab, Gila	Betty, Diana, Fred	6
Diana	Ehab, Gila	Chio, Fred	4
Ehab	Chio, Diana, Gila	Ari, Fred	5
Fred	Gila	Chio, Diana, Ehab	4
Gila	Chio, Diana, Ehab, Fred	Ari	5

Dies ist Informatik!

Viele der derzeit verbreiteten sozialen Internet-Netzwerke verwenden ähnliche oder kompliziertere Konzepte so genannter Freundschaften. Dabei ist es möglich, dass geteilte Bilder oder auf anderen Seiten gepostete Kommentare auch von Usern gelesen bzw. gesehen werden können, die nicht zu den eigenen Netzwerk-Freunden gehören.

Soziale Internet-Netzwerke haben seit einigen Jahren eine enorme Bedeutung erlangt. Die durch die Nutzer von Plattformen wie Facebook oder Twitter gebildeten Netzwerke dienen aber nicht nur der Kommunikation unter den Nutzern. Zum Beispiel lassen Unternehmen soziale Netzwerke untersuchen, um mehr über die Interessen potenzieller Kunden zu erfahren.

Grosse Netzwerke lassen sich nur mit Hilfe von Computern durchforsten. Die Informatik stellt dazu Algorithmen auf Graphen bereit, mit denen man u.a. den Grad der Erreichbarkeit zwischen den Mitgliedern des Netzwerkes ermitteln kann.

Webseiten und Stichwörter

Soziales Netz, Graphentheorie

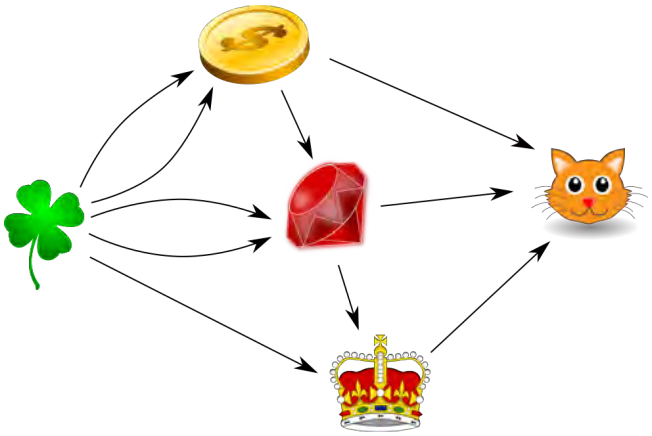
- `https://de.wikipedia.org/wiki/Soziales_Netzwerk_(Soziologie)`
- `https://de.wikipedia.org/wiki/Online-Community`

 © Informatik-Biber 2015, SVIA

11 Der Magier

Der Magier kann Dinge verwandeln. Bei jeder Verwandlung verschwinden ein oder mehrere Dinge und etwas Neues wird erschaffen. Der Magier beherrscht vier Verwandlungen:

- Aus zwei Kleeblättern wird eine Münze erschaffen.
- Aus einer Münze und zwei Kleeblättern wird ein Edelstein erschaffen.
- Aus einem Edelstein und einem Kleeblatt wird eine Krone erschaffen.
- Aus einer Münze, einem Edelstein und einer Krone wird ein Kätzchen erschaffen.



Wie viele Kleeblätter verbraucht der Magier, um ein Kätzchen zu erschaffen?
Gib die richtige Antwort hier ein (als Zahl): _____

Lösung

Die richtige Antwort ist 11.

Für 1 Münze werden 2 Kleeblätter verbraucht.

Für 1 Edelstein werden 2 Kleeblätter + 1 Münze verbraucht, also $2 + 2 = 4$ Kleeblätter.

Für 1 Krone werden 1 Rubin + 1 Kleeblatt verbraucht, also $4 + 1 = 5$ Kleeblätter.

Für 1 Kätzchen werden 1 Münze + 1 Rubin + 1 Krone verbraucht, also $2 + 4 + 5 = 11$ Kleeblätter.

Dies ist Informatik!

Die Abbildung in der Aufgabe nennt man in der Informatik einen gerichteten Graphen. Er besteht aus Knoten (das sind hier die Dinge, die der Zauberer verwandeln kann) und Pfeilen. Bei dieser Aufgabe bedeutet ein Pfeil von A nach B : „A wird zum Erschaffen von B benötigt“. Eine Besonderheit des Graphen in der Aufgabe ist, dass zwischen zwei Knoten auch mehrere gleichartige Pfeile sein können. Das nennt man einen Multigraphen.

Mit Graphen kann man viele Strukturen modellieren. Bei einem Stammbaum stellt jeder Knoten ein Familienmitglied und jeder Pfeil eine Verwandtschaftsbeziehung dar (üblicherweise: Eltern-Kind). In

einem U-Bahn-Netz stellt jeder Knoten eine U-Bahn-Station dar und jeder Pfeil eine direkte Zugverbindung zwischen zwei Stationen. Mit Multigraphen kann man z. B. das World-Wide-Web modellieren. Jeder Knoten stellt eine Webseite dar und jeder Pfeil einen Link zu einer anderen Seite. Dabei kann es sein, dass auf einer Webseite mehrere Links zu ein und derselben Webseite sind. Dann gibt es im Multigraphen an dieser Stelle mehrere Pfeile zwischen zwei Knoten.

Webseiten und Stichwörter

Graph, Multigraph

- `https://de.wikipedia.org/wiki/Graph_(Graphentheorie)`

 © Informatik-Biber 2015, SVIA

37. Effizient kochen (SJ 11-13)

Anna und Ben kommen hungrig nach Hause.

Nun möchten sie möglichst schnell zu Abend essen.

Im Kühlschrank sind Broccoli, Fisch, Tomaten und Fleisch.

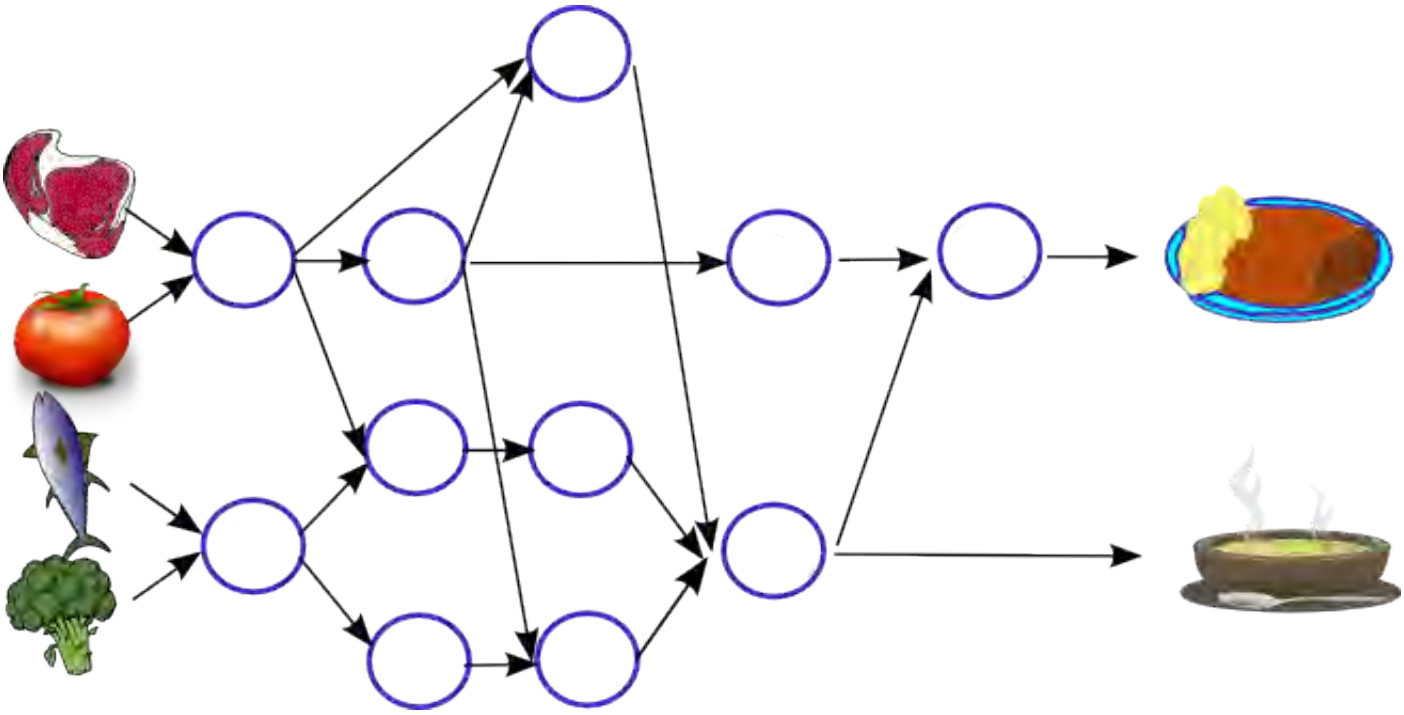
Daraus wollen sie zwei Gerichte zubereiten.

Die Zubereitung erfolgt in mehreren Schritten.

Die meisten Schritte können Anna und Ben erst dann beginnen,

wenn sie andere Schritte bereits erledigt haben.

Im Bild sind die Schritte als Kreise und die Abfolge der Schritte mit Pfeilen dargestellt.



Annas und Bens Herd hat drei Herdplatten. Sie können also maximal drei Schritte gleichzeitig erledigen. Für jeden Schritt benötigen sie 5 Minuten.

Wie viele Minuten benötigen sie für die Zubereitung der beiden Gerichte mindestens?

Gib die Minuten hier ein (als Zahl): _____

Lösung:

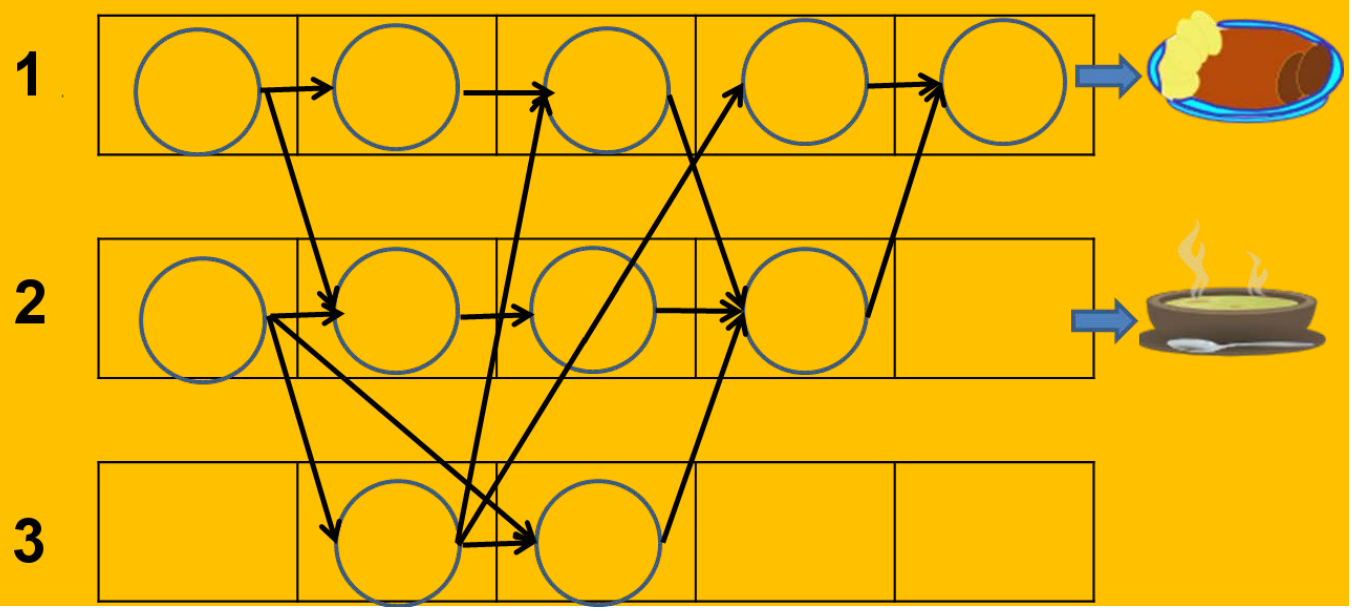
Die richtige Antwort ist 25 Minuten.

Das Bild zeigt, wie die Schritte auf die drei Herdplatten verteilt werden können,

um eine minimale Zubereitungszeit zu erreichen.

Die Herdplatte 1 wird dabei für 5 Schritte benutzt.

Somit ergeben sich 25 Minuten als minimale Zubereitungszeit.



Stufen	3-4	Leicht	Mittel	Schwer
Stufen	5-6	Leicht	Mittel	Schwer
Stufen	7-8	Leicht	Mittel	Schwer
Stufen	9-10	Leicht	Mittel	Schwer
Stufen	**11-13**	Leicht	**Mittel**	Schwer

DAS IST INFORMATIK!

Will man ein Programm, das ein Computer ausführen soll, auf mehrere Prozessoren verteilen, so muss man dieses Programm in geeignete Teile zerlegen.

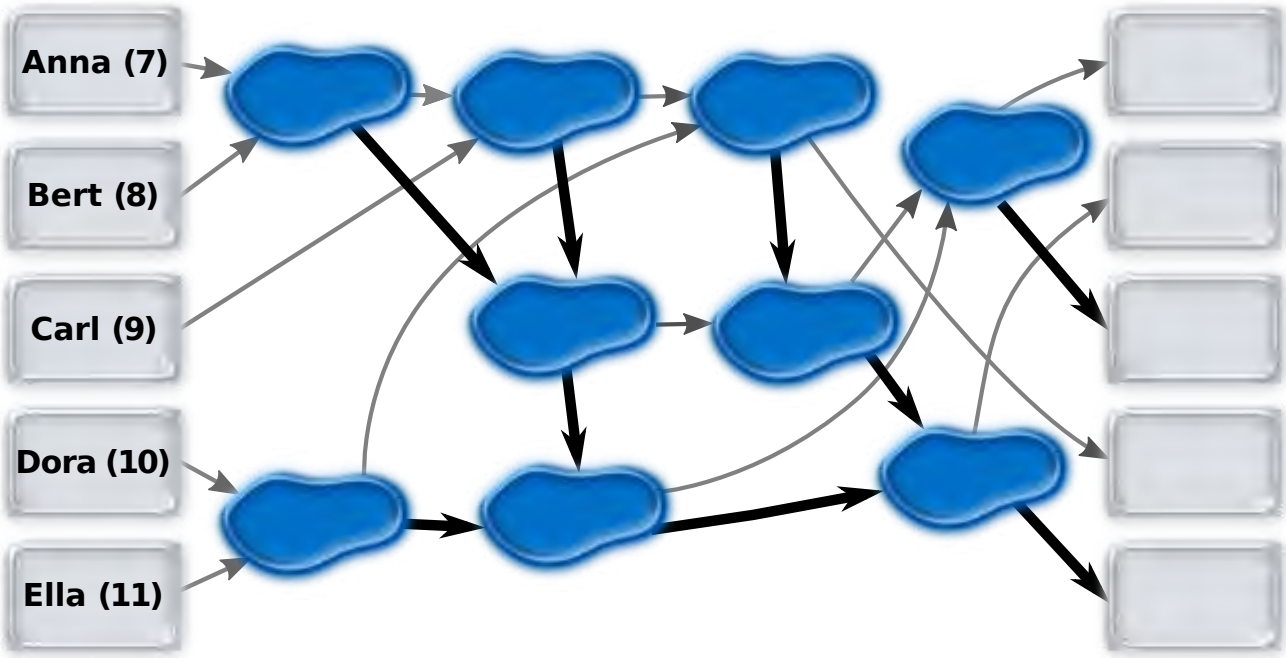
Die Zuteilung an die Prozessoren sollte dann so geschehen, dass Programmteile möglichst wenig auf die Zwischenergebnisse anderer Programmteile warten müssen.

Die Informatik arbeitet an immer besseren Algorithmen für dieses “job scheduling”.

9 Pfützenspringen

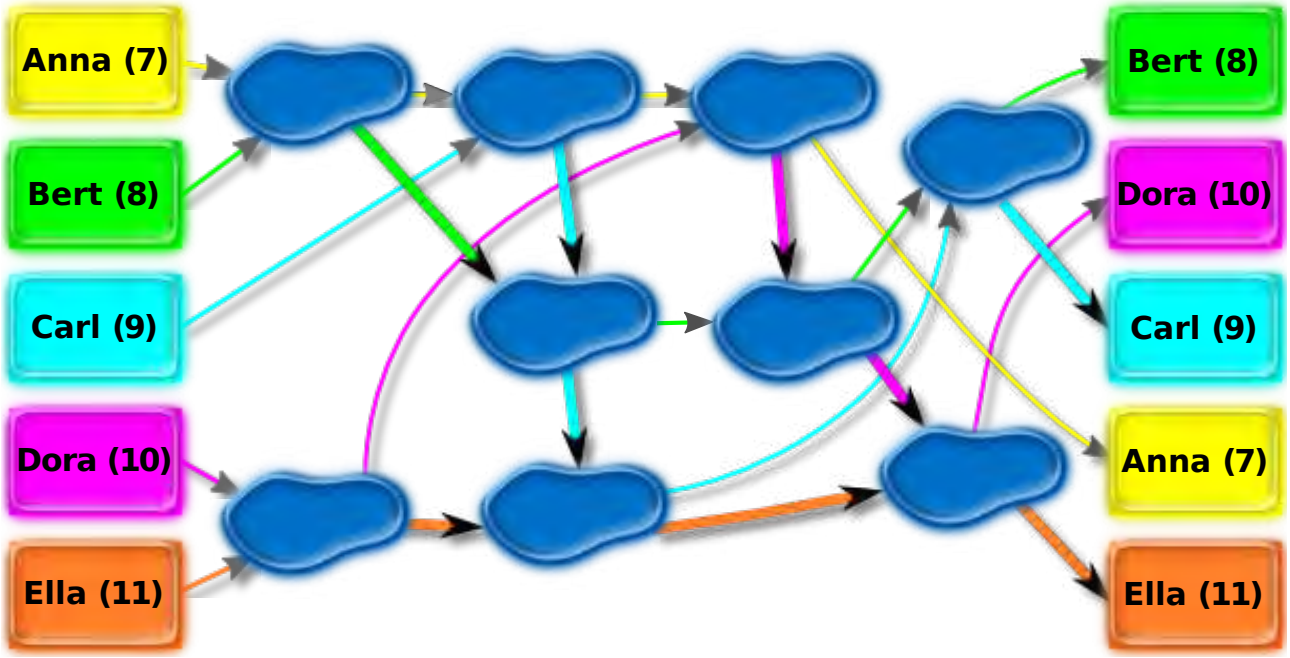
Anna (7 Jahre), Bert (8 Jahre), Carl (9 Jahre), Dora (10 Jahre) und Ella (11 Jahre) spielen ein Spiel, bei dem sie von Pfütze zu Pfütze springen. Dazu haben sie Pfeile auf den Boden gemalt. Am Anfang stehen die Kinder auf den Feldern links und springen entlang der Pfeile jeweils zu einer Pfütze. Ein Kind, das zuerst in einer Pfütze ist, wartet, bis ein zweites dazu kommt. Das ältere Kind springt dann weiter entlang des dicken Pfeiles, das jüngere entlang des dünnen Pfeiles.

Ziehe jeden Namen auf das Feld rechts, auf dem das Kind am Ende ankommt.



Lösung

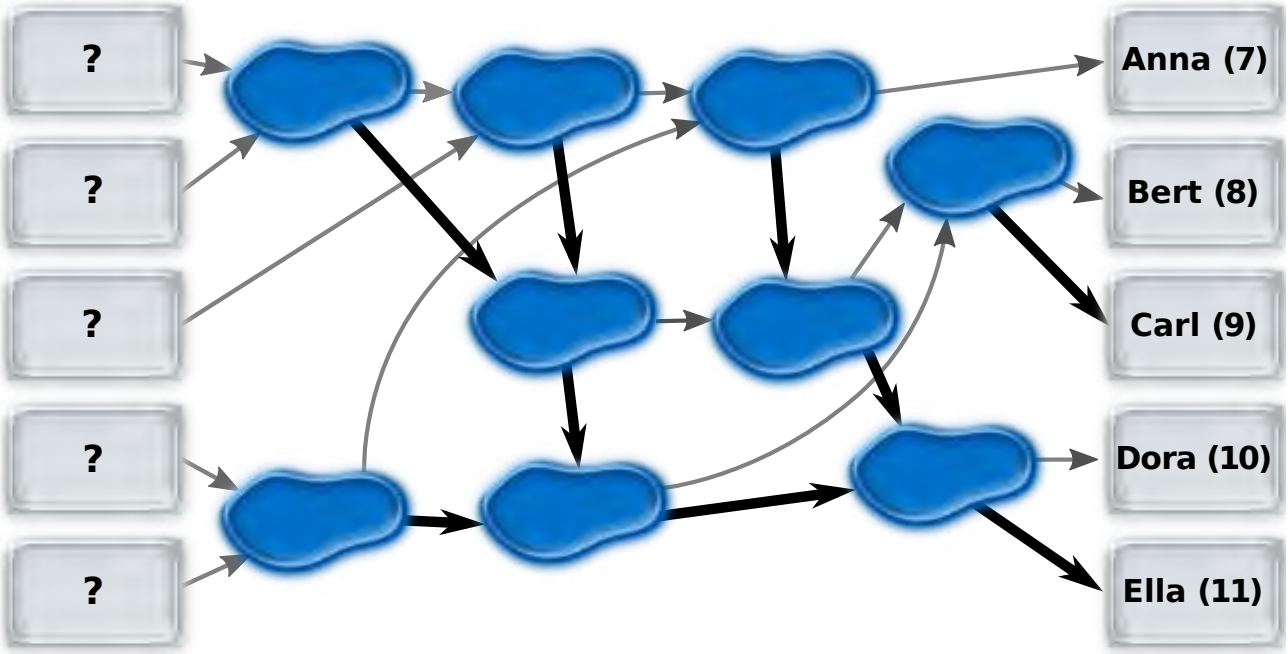
Das folgende Bild zeigt die Wege der fünf Kinder.



Dies ist Informatik!

Die Pfützen und Pfeile bilden zusammen ein Netzwerk. Die Pfützen funktionieren wie Vergleichselemente. Wenn die Vergleichselemente richtig verbunden werden, kann das Netzwerk fünf Dinge in beliebiger Reihenfolge sortieren. Ein solches Netzwerk heisst dann Sortiernetz. Da in Sortiernetzen viele Vergleiche parallel ausgeführt werden, können sie sehr effizient sortieren. Das Netz in dieser Aufgabe ist kein Sortiernetz. Die Vergleichselemente sind nicht richtig verbunden. Die folgende Grafik zeigt ein Sortiernetz – mit richtigen Verbindungen:

 © Informatik-Biber 2014, SVIA



Webseiten und Stichwörter

Sortiernetzwerke, Parallele Verarbeitung, Algorithmen

- `http://de.wikipedia.org/wiki/Sortierverfahren#Beweis_der_unteren_Schranke_f.C3.BCr_vergleichsbasiertes_Sortieren`
- `http://en.wikipedia.org/wiki/Sorting_network` *Sorting networks (english)*

10 Fussspuren

Fusstapfen-Bäume! Die werden nach einem bestimmten Schema gestapft.

Dies ist das Stapfprogramm für einen **1-Baum:**

Gehe 1 Schritt vor, dabei machst du 1 Fusstapfen.
Gehe wieder zurück.

1-Baum

Kennt man das Stapfprogramm für einen 1-Baum, sieht das Stapfprogramm für einen **2-Baum** so aus:

Gehe 2 Schritte vor, dabei machst du 2 Fusstapfen.
Wende dich nach rechts und stapfe einen 1-Baum.
Wende dich nach links und stapfe einen 1-Baum.
Gehe in deiner Spur wieder zurück.

2-Baum

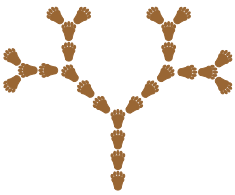
Das Stapfprogramm für einen 3-Baum ist nun auch schnell erklärt, denn ein **3-Baum** enthält 2-Bäume:

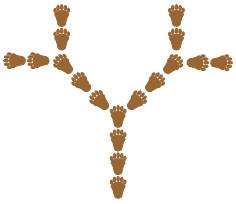
Gehe 3 Schritte vor, dabei machst du 3 Fusstapfen.
Wende dich nach rechts und stapfe einen 2-Baum.
Wende dich nach links und stapfe einen 2-Baum.
Gehe in deiner Spur wieder zurück.

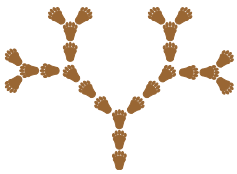
3-Baum

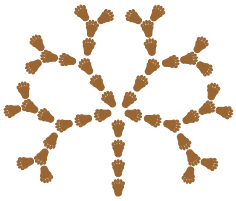
Das Stapfprogramm für einen 4-Baum folgt dem gleichen Schema.

Welcher Baum ist nach diesem Schema ein 4-Baum?

A 

B 

C 

D 

Lösung

Antwort A ist richtig:

Wenn man das Stapfprogramm für einen 2-Baum mit dem für einen 3-Baum vergleicht, erkennt man das Schema und kann das Stapfprogramm für einen 4-Baum aufschreiben:

- Gehe 4 Schritte vor, dabei machst du 4 Fusstapfen.

 © Informatik-Biber 2014, SVIA

- Wende dich nach rechts und stapfe einen 3-Baum.
- Wende dich nach links und stapfe einen 3-Baum.
- Gehe in deiner Spur wieder zurück.

Nur die Figur in Antwort A entsteht durch dieses Programm. Sie ist deshalb ein 4-Baum, der aus 4 Fussstapfen und zwei 3-Bäumen besteht.

Die Figur in Antwort B besteht nicht aus 2 korrekten 3-Bäumen.

Die Figur in Antwort C enthält zwar zwei 3-Bäume, beginnt aber mit nur 3 Fussstapfen.

Die Figur in Antwort D beginnt mit 4 Fussstapfen, hat aber vier statt zwei 3-Bäume.

Dies ist Informatik!

Das Schema funktioniert für alle möglichen Zahlen. n-Bäume stapfen heisst n Schritte vorgehen, dabei n Fussstapfen machen, zwei (n–1)-Bäume stapfen und wieder zurückgehen. Ein (n–1)-Baum wiederum besteht aus n–1 Fussstapfen und zwei (n–2)-Bäumen, und so weiter, bis man beim 1-Baum ankommt, für den es ein spezielles Programm gibt.

In der Informatik spricht man von Rekursion, wenn eine Aufgabe erledigt wird, indem man einfachere Versionen der gleichen Aufgabe erledigt, so lange bis die einfachste(n) Version(en) der Aufgabe auf spezielle Art und Weise erledigt wird. In vielen Fällen kann mit Rekursion elegant beschrieben werden, wie eine Aufgabe zu erledigen ist.

Aber Achtung: Um einen n-Baum zu stapfen muss man 2 (n–1)-Bäume stapfen, also 4 (n–2)-Bäume stapfen, also 8 (n–3)-Bäume stapfen, . . . , also $2^{(n-1)}$ 1-Bäume stapfen. Für eine grosse Zahl n kann das sehr lange dauern. Rekursion kann also elegant, aber auch mühsam sein.

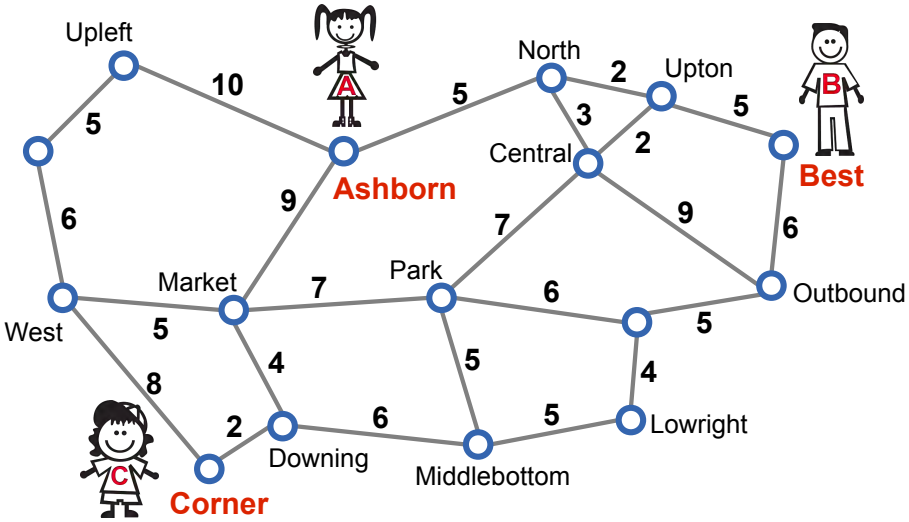
Webseiten und Stichwörter

Rekursion, Fraktale, Algorithmen, Computer Grafik

- `http://de.wikipedia.org/wiki/Rekursion`

11 Treffpunkt

Anne, Bernie und Clara wohnen in einer Stadt mit einem gut ausgebauten U-Bahn-Netz. Der Netzplan (siehe Bild) zeigt Haltestellen und die Strecken zwischen den Haltestellen. Für jede Strecke ist angegeben, wie viele Minuten reine Fahrzeit man für die Strecke benötigt.



Anne wohnt bei der Haltestelle Ashborn, Bernie bei Best und Clara bei Corner. Sie wollen sich an irgendeiner Haltestelle treffen, aber jeder möchte höchstens 15 Minuten reine Fahrzeit benötigen.

Welche Haltestellen kommen als Treffpunkt in Frage?

Lösung

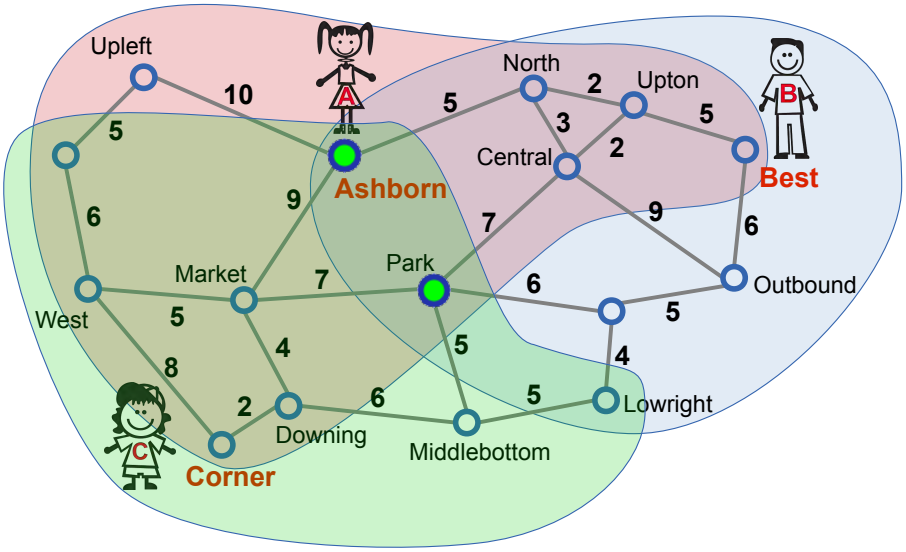
Park und Ashborn kommen als Treffpunkt in Frage. Zu diesen beiden Haltestellen benötigen alle drei höchstens 15 Minuten reine Fahrzeit, wenn sie die folgenden Strecken benutzen:

- Park: Ashborn-North-Central-Park: 15 Min.; Best-Upton-Central-Park: 14 Min.; Corner-Downing-Market-Park oder Corner-Downing-Middlebottom-Park: 13 Min. (Für den anscheinend direkteren Weg Ashborn-Market-Park würde Anne mehr Zeit benötigen als gewünscht, nämlich 16 Minuten.)

- Ashborn: Ashborn-Ashborn: 0 Min. (Anna muss hier also gar nicht fahren); Best-Upton-North-Ashborn: 12 Min.; Corner-Downing-Market-Ashborn: 15 Min.

Im folgenden Bild zeigen die farbigen Bereiche, welche Haltestellen Anne, Bernie bzw. Clara mit höchstens 15 Minuten reiner Fahrzeit erreichen können. Nur Ashborn und Park liegen im Schnitt der drei Bereiche. Es gibt also keine anderen möglichen Treffpunkte.

 © Informatik-Biber 2014, SVIA



Dies ist Informatik!

Beziehungen zwischen Elementen nur einer Menge werden häufig zu „Graphen“ erweitert: Die Elemente heissen dann „Knoten“ und „Kanten“ - das sind Paare von Knoten, die miteinander in Beziehung stehen. In manchen Graphen haben die Kanten eine Richtung: Knoten a steht in Beziehung mit Knoten b, aber nicht umgekehrt. Ausserdem können den Kanten bestimmte Werte als „Gewichte“ zugewiesen werden.

Ein Verkehrsnetz wie das in der Aufgabe kann sehr gut durch einen Graph modelliert werden und zwar mit Kantengewichten, die der reinen Fahrzeit entsprechen. Erfreulicherweise hat die Informatik viele leistungsfähige Algorithmen für Graphen entwickelt; unter anderem solche, die kürzeste Wege (also Folgen von Kanten) zwischen Knoten finden. „Kürzeste-Wege-Algorithmen“ - wie der von Edsger W. Dijkstra - bilden die Grundlage für Systeme zur Routenplanung, z.B. Navigationssysteme für Autos.

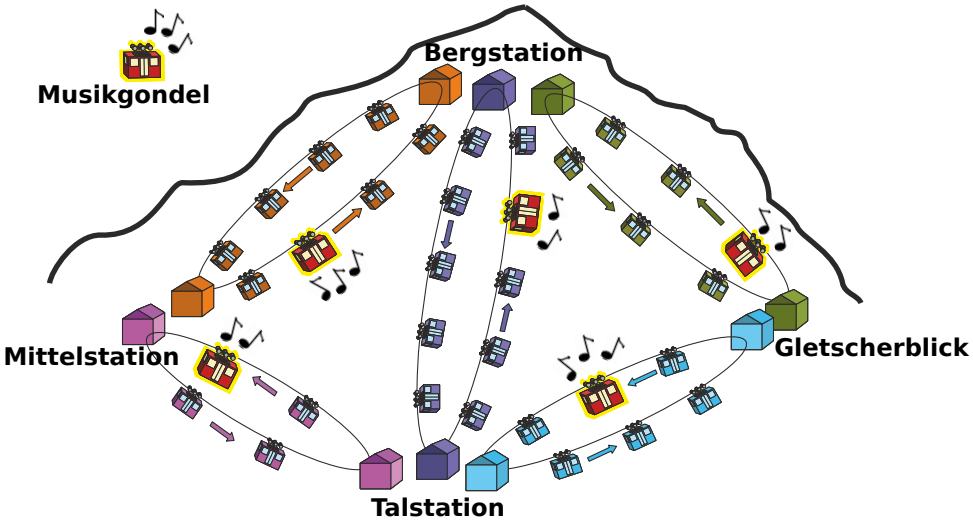
Webseiten und Stichwörter

Kürzester Weg, Graphentheorie, Optimierung

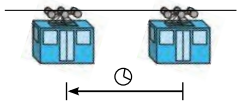
- `http://de.wikipedia.org/wiki/Dijkstra-Algorithmus`

15 Gipfelstürmer

Tom möchte zur Bergstation fahren. Er kann von der Talstation aus mit verschiedenen Gondelbahnen dorthin gelangen. Aber er möchte nur in Gondeln fahren, in denen Musik gespielt wird. Das Bild zeigt die aktuellen Positionen der Gondeln zu dem Zeitpunkt, als Tom von der Talstation wegfahren möchte.



Alle Gondelbahnen bewegen sich gegen den Uhrzeigersinn. Der Fahrzeitabstand von einer Gondel zur vorigen Gondel ist die Zeit, welche die Gondel braucht, um von ihrer aktuellen Position zur aktuellen Position der vorigen Gondel zu fahren (siehe Bild rechts). Der Fahrzeitabstand ist bei allen Gondelbahnen gleich. Er ändert sich auch nicht, wenn Gondeln durch Stationen fahren.



Die Gondeln aller Gondelbahnen fahren immer zu gleichen Zeitpunkten durch die Stationen. Wenn Tom durch eine Station fährt, kann er flink und ohne Zeitverlust in die Gondel einer anderen Gondelbahn umsteigen. Manchmal muss er aber auch auf die nächste Musikgondel warten.

Auf welchem Weg kommt Tom am schnellsten zur Bergstation?

A) Talstation → Mittelstation → Bergstation

B) Talstation → Mittelstation → Talstation → Bergstation

C) Talstation → Bergstation

D) Talstation → Gletscherblick → Bergstation

 © Informatik-Biber 2014, SVIA

Lösung

Die richtige Antwort ist D:

GT sei die Musikgondel der Strecke Gletscherblick-Talstation. GB sei die Musikgondel der Strecke Gletscherblick-Bergstation. Tom braucht 8 Fahrzeitabstände (F). Der Ablauf ist so:

F-1: GT erreicht Talstation. Tom steigt ein. GB fährt Richtung Bergstation.

F-2: GT verlässt Talstation. GB erreicht Bergstation.

F-3: GT fährt Richtung Gletscherblick. GB verlässt Bergstation.

F-4: GT erreicht Gletscherblick. Tom steigt aus. GB fährt Richtung Gletscherblick.

F-5: GB erreicht Gletscherblick. Tom steigt ein.

F-6: GB verlässt Gletscherblick.

F-7: GB fährt Richtung Bergstation.

F-8: GB erreicht Bergstation. Tom steigt aus.

Bei Antwort A braucht Tom 10 Fahrzeitabstände. Bei den Antworten B und C braucht Tom 11 Fahrzeitabstände.

Dies ist Informatik!

Beim Einstieg in die Informatik scheint es zunächst so einfach zu sein: Computer führen die in einem Programm enthaltenen Befehle schön ordentlich nacheinander aus.

Für viele Abläufe, die mit Computern modelliert und realisiert werden können, ist ein strenges Nacheinander aber keine gute Idee. Zum Beispiel für eine Gondelbahn, denn die dürfte dann immer nur ein Stückchen fahren, bevor wieder eine andere Gondelbahn mit dem Fahren an der Reihe ist.

Die Informatik würde die Gondelbahnen eher als „Prozesse“ betrachten: Sie laufen gleichzeitig ab und müssen nur ab und zu „synchronisiert“ werden.

Insbesondere funktionieren die Gondelbahnen wie Programmstücke in einer Datenfluss-Architektur: Jedes Programmstück kann ausgeführt werden, wenn die nötigen Eingabedaten vorliegen. Jede Gondelbahn kann Tom von der Start- zur Zielstation bringen, wenn Tom und die Musikgondel an der Startstation sind.

Webseiten und Stichwörter

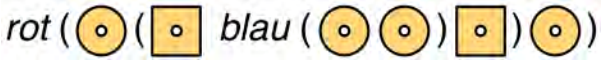
Optimierung, Simulation, Algorithmen

- `http://de.wikipedia.org/wiki/Optimierung_%28Mathematik%29`

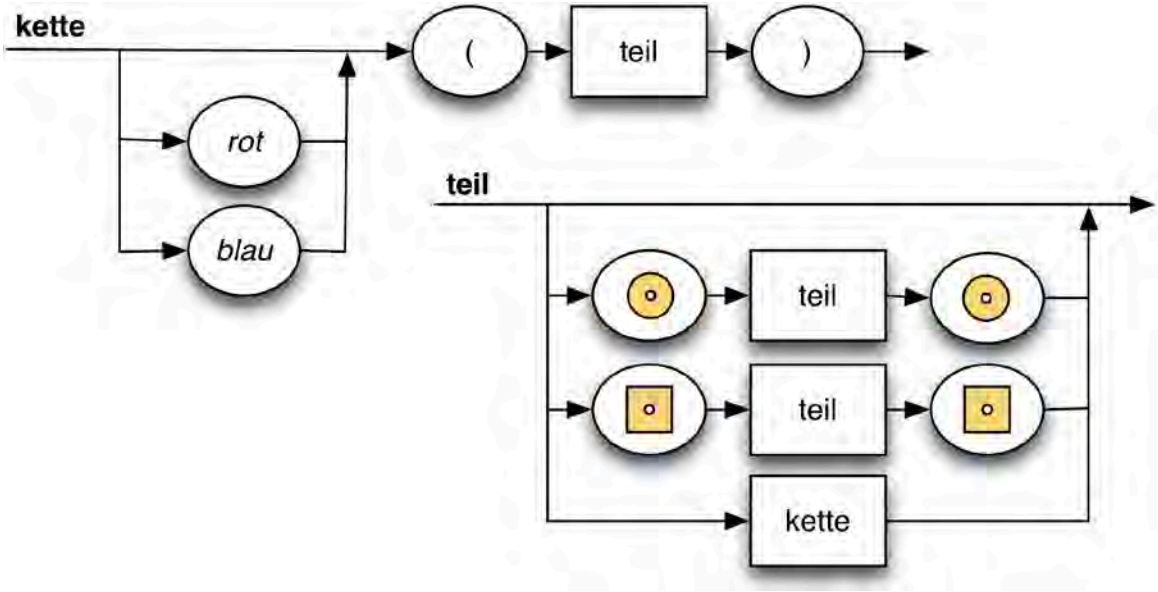
38. Bunte Perlenkette (SJ 11-13)

Die Kinder der kreativen Biberdame Grace basteln Perlenketten. Sie haben verschiedene Holzperlen (quadratisch und kreisförmig), die sie rot oder blau einfärben können. So können sie beispielsweise die folgende Kette basteln:

Grace erklärt den Kindern, dass diese Kette die folgende Kettenbeschreibung hat:



Grace fertigt nun zwei Zeichnungen an, die „kette“ und „teil“ heissen. Sie möchte nur Ketten haben, deren Kettenbeschreibung man erhalten kann, wenn man den Pfeilen in den Zeichnungen folgt:



Die kleinen Biber basteln vier Ketten. Leider passt nur eine zu Graces Zeichnungen.

Welche?

A)

B)

C)

D)

Lösung:

Antwort D ist richtig:

Die Zeichnungen ergeben verschachtelte Beschreibungen von (möglicherweise gefärbten) Kettenteilen. Ein Kettenteil beginnt und endet mit gleichartigen Perlen, die auch gleich gefärbt sein müssen. Jede Kette, die zu den Zeichnungen passt, kann also in zwei spiegelbildlich gleiche Hälften geteilt werden. Das funktioniert nur bei Antwort D.

In A sind die Farben der Quadrate nicht spiegelbildlich. In B ist die Anordnung der blauen Kreise und Quadrate in der Mitte nicht spiegelbildlich. C ist insgesamt nicht spiegelbildlich; in der Mitte ist kein Perlenpaar, sondern nur ein einzelner blauer Kreis.

Stufen	3-4	Leicht	Mittel	Schwer
Stufen	5-6	Leicht	Mittel	Schwer
Stufen	7-8	Leicht	Mittel	Schwer
Stufen	9-10	Leicht	Mittel	Schwer
Stufen	**11-13**	Leicht	Mittel	**Schwer**

DAS IST INFORMATIK!

Grace' Zeichnungen werden in der Informatik "Syntaxdiagramme" genannt. Die Grammatik einer Programmiersprache kann in der Regel mit Syntaxdiagrammen beschrieben werden.

17 Richtige Rechtecke?

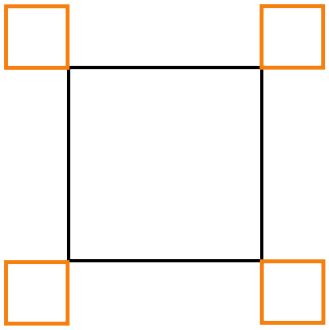
Ein Roboter ist darauf spezialisiert, Rechtecke zu zeichnen. Er kann die folgenden einfachen Anweisungen ausführen:

`Orange`	zeichne eine orange Linie der Länge 1
`Black`	zeichne eine schwarze Linie der Länge 1
`Turn`	drehe dich um 90° im Uhrzeigersinn

Ausserdem kann der Roboter die folgenden Anweisungen ausführen, die aus anderen Anweisungen A und B zusammengesetzt werden; A und B selbst können einfache oder zusammengesetzte Anweisungen sein:

A,B	führe A aus und führe danach B aus
$n\times(B)$	führe B n-mal aus

Der Roboter soll die folgende Zeichnung erstellen:



Welche Anweisung ergibt NICHT die gewünschte Zeichnung?

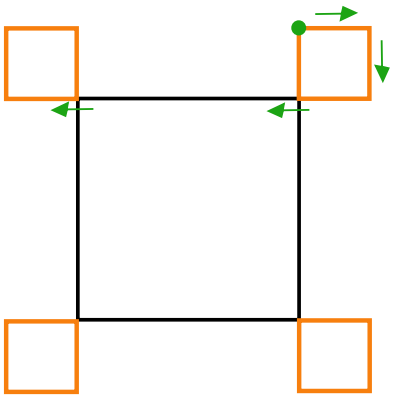
A)	4×(2×(Orange, Turn), Orange, 3×(Black), Orange, Turn)
B)	4×(3×Black, 3×(Orange, Turn), Orange)
C)	4×(2×(Orange, Turn), 3×(Black), 2×(Orange, Turn))
D)	4×(Black, 3×(Orange, Turn), Orange, 2×(Black))

Lösung

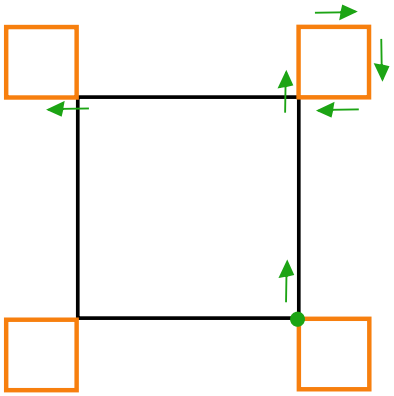
Antwort C ist richtig.

Die Anweisung A ergibt die gewünschte Zeichnung:

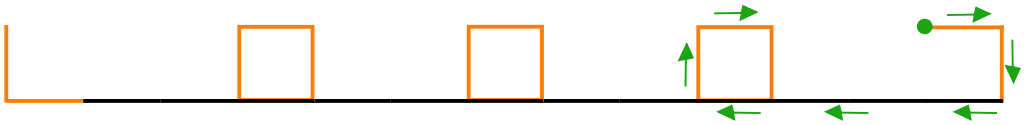
 © Informatik-Biber 2014, SVIA



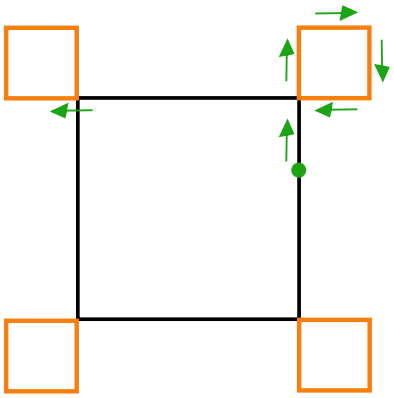
Die Anweisung B ergibt die gewünschte Zeichnung:



Die Anweisung C ergibt NICHT die gewünschte Zeichnung:



Die Anweisung D ergibt die gewünschte Zeichnung:



Dies ist Informatik!

Selbst wenn man eine sehr einfache Programmiersprache wie die des Rechteck-Roboters verwendet, kann man leicht Fehler machen. Fehler in Programmen heissen in der Informatik „Bugs“, und „Debugging“ bezeichnet die Suche nach Fehlern in einem Programm.

Im Jahr 2014 wurde der „Heartbleed Bug“ bekannt. Es handelte sich um einen Fehler in einer weit verbreiteten Programmbibliothek für verschlüsselten Datenaustausch. Dieser Fehler machte Angriffe auf viele Internet-Dienste möglich, z.B. zum Stehlen von Zugangsdaten (Benutzernamen und Passwörtern). Bugs können also weitreichende Auswirkungen haben. Debugging gehört – neben dem systematischen Vermeiden von Fehlern – zu den ganz besonders wichtigen Arbeiten in der Informatik.

Webseiten und Stichwörter

Turtle Grafik und Logo, Fehlersuche, Computer Grafik, Programmierung

- `https://de.wikipedia.org/wiki/Turtle-Grafik`
- `https://de.wikipedia.org/wiki/Strukturierte_Programmierung`
- `http://www.android-turtlegrafik.ch/`

 © Informatik-Biber 2014, SVIA

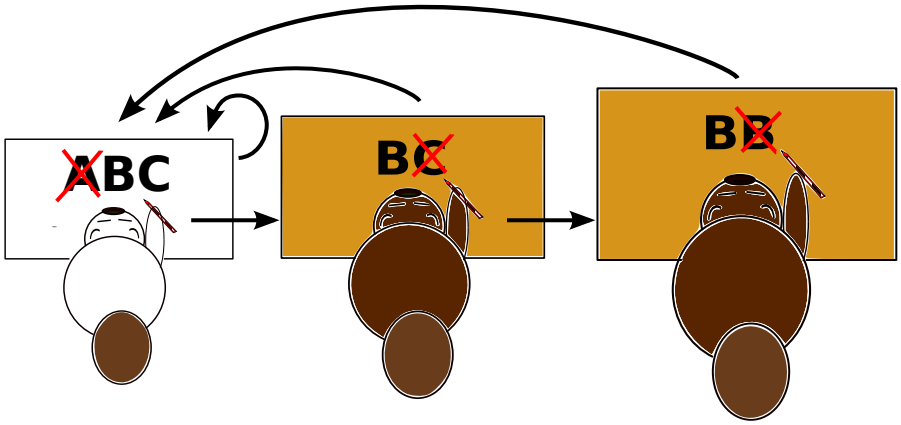
18 Nachricht aus Bibirien

Im weit entfernten Bibirien werden die – ohnehin nur aus den Buchstaben **A**, **B** und **C** bestehenden – Zeitungsmeldungen gelegentlich vom Nachrichtenamt „korrigiert“. Die drei Korrektoren des Amtes lesen eine Nachricht jeweils von links nach rechts und suchen dabei nach bestimmten Buchstabenmustern:

1. Der Unterkorrektor sucht nach der Folge **ABC**. Wenn er die Folge findet, ersetzt er sie durch **BC** und fängt mit der geänderten Nachricht wieder von vorne an. Findet er die Folge nicht, gibt er die Nachricht an den Hauptkorrektor weiter.

2. Der Hauptkorrektor sucht nach der Folge **BC**. Wenn er die Folge findet, ersetzt er sie durch **B** und gibt die geänderte Nachricht an den Unterkorrektor zurück. Findet er die Folge nicht, gibt er die Nachricht an den Chefkorrektor weiter.

3. Der Chefkorrektor sucht nach der Folge **BB**. Wenn er die Folge findet, ersetzt er sie durch **B** und gibt die geänderte Nachricht an den Unterkorrektor zurück. Findet er die Folge nicht, ist die Korrektur zu Ende.



Drei der folgenden Nachrichten bestehen am Ende der Korrektur nur noch aus einem Buchstaben B. Nur eine NICHT – welche?

A) **AAABCB**

B) **ABCABC**

C) **ABABCB**

D) **ABCCCC**

Lösung

Antwort C ist richtig.

Die einzelnen Nachrichten werden so „korrigiert“:

A) **AAABCB** → **AABCB** → **ABCB** → **BCB** → **BB** → **B**

B) **ABCABC** → **BCABC** → **BCBC** → **BBC** → **BB** → **B**

C) **ABABCB** → **ABBCB** → **ABBB** → **ABB** → **AB**

D) **ABCCCC** → **BCCCC** → **BCCC** → **BCC** → **BC** → **B**

Dies ist Informatik!

Was kann berechnet werden? Diese Frage haben sich, insbesondere in der ersten Hälfte des 20. Jahrhunderts, viele Wissenschaftler gestellt. Viele davon haben sich Möglichkeiten überlegt, das Wesen von Berechnungen bzw. den Begriff des Berechnungsverfahrens (also des Algorithmus!) durch ein formales Modell zu beschreiben. Das berühmteste solche Modell ist wohl die Turing-Maschine, die trotz des Namens nie gebaut wurde. Nicht ganz so bekannt sind Textersetzungssysteme, wie sie etwa der Russe Andrei Markow beschrieben hat. Ein solches Textersetzungssystem wird von den bibirischen Korrektoren in dieser Aufgabe angewendet. Das Schöne und Beruhigende für die Informatik ist, dass alle bisher entwickelten Formalisierungen von Berechnungsverfahren (weitere sind etwa das Lambda-Kalkül oder μ-rekursive Funktionen) als gleichwertig erkannt wurden. Auch moderne Computer können grundsätzlich nicht mehr (aber auch nicht weniger) als die formalen Modelle. Soweit die Theorie; für die Praxis ist die Existenz moderner Programmiersprachen und Entwicklungsumgebungen dann doch ein Fortschritt.

Webseiten und Stichwörter

Markow-Algorithmus, Algorithmen

- `http://de.wikipedia.org/wiki/Markow-Algorithmus`

 © Informatik-Biber 2014, SVIA

Christian Rohrbach

Algorithmen, Flussdiagramme und schwarze Löcher

Für (hoch-)begabte Mittelstufenlernpartner und neugierige Oberstufenklassen

Kopfrechentraining und das Üben der schriftlichen Subtraktion sind kein Luxus. Sollen die Übungen produktiv sein, d.h. auch etwas mathematisch-inhaltlich Bedeutsames aufzeigen, so sind solche Aufgaben nicht ganz einfach zu finden.

Mit den folgenden Arbeitsblättern sind folgende Zielsetzungen und Fragen angesprochen:

- Welchen Einfluss auf die Lösungsstrategie und das Vorgehen hat die Art und Weise, wie eine Aufgabe den Schülerinnen und Schülern präsentiert wird? Was bevorzugen sie selber?
- Im Kleinen sollen die Schüler und Schülerinnen Gelegenheit erhalten, selber zu «forschen» und zu «entdecken»; mit offenen Fragestellungen werden die zunächst gestellten Aufgaben aufgebrochen und ausgeweitet. Weitere Fragestellungen darüber hinaus sind möglich und können sich die Kinder selber ausdenken.
- Unerwartete und verblüffende Ergebnisse werden sich einstellen, z.T. sind die Probleme fachwissenschaftlich noch nicht gelöst. Die Einstellung und Haltung der Kinder über das, was Mathematik ist oder eben nicht ist, könnte durch solche Probleme im motivierend positiven Sinne beeinflusst werden.

Bei jeder der gestellten Aufgaben geht es um einen Algorithmus, also um einen «nach einem bestimmten Schema ablaufenden Rechenvorgang» (Duden). Die Algorithmen für die schriftlichen Operationen sind den Schülerinnen und Schülern seit der Mittelstufe bestens bekannt. Hier werden sie ganz andere Abläufe antreffen, bei denen sie zunächst nicht wissen (höchstens ahnen) können, wohin sie führen. Im bescheidenen Rahmen sind sie damit in die gleiche Situation versetzt wie ein mathematisch Forschender: Man probiert etwas aus, entdeckt eine bestimmte Regelmässigkeit, etwas Auffälliges und versucht danach zu erklären, zu verstehen, zu beweisen, warum das so ist.

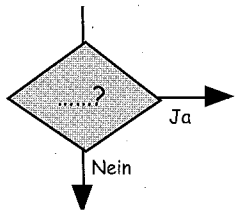
Verwendung der Arbeitsblätter

(Aufgaben 1 bis 6)

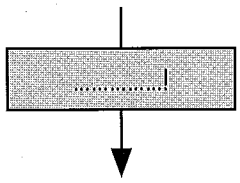
Die Arbeitsblätter enthalten je zwei Abschnitte. Auf die Resultate und mathematischen Hintergründe der Aufgaben wird weiter unten je einzeln eingegangen. Die Blätter können nach folgendem Phasenplan eingesetzt werden.

Voraussetzung:

Die Schüler und Schülerinnen kennen die Grafik eines Flussdiagrammes. Nötig ist lediglich, zwischen zwei grafischen Elementen zu unterscheiden:



Entscheidung
In diesem Kästchen steht eine Frage, die mit «Ja» oder «Nein» beantwortet werden kann. Der Antwort entsprechend wird das Kästchen verlassen.



Anweisung
Hier steht eine Aufforderung, etwas zu tun. Das Ergebnis der Handlung (meist einer Rechnung) wird dann im so genannten «Arbeitsspeicher» unter dem entsprechenden Buchstaben notiert. Dies wird mit dem Pfeil ➜ signalisiert.

Bei der Weiterarbeit wird immer mit der untersten, also zuletzt eingetragenen Zahl weitergearbeitet. Der «Arbeitsspeicher» kann etwa an den oder die Speicher in einem Taschenrechner erinnern, in die man ebenfalls Zahlen «ablegen» und wieder holen kann.

Die auf den Blättern vorhandenen gezeichneten «Arbeitsspeicher» sind lediglich als Vorlage gedacht für die Gestaltung im eigenen Heft oder auf dem eigenen Blatt Papier, denn sie werden beim Lösen der Aufgaben platzmässig nicht ausreichen.

Ohne es jeweils zu erwähnen, wird bei allen Aufgaben nur im Zahlenraum der natürlichen Zahlen $\mathbf{N}_0$ gearbeitet. Mit z.B. «Wähle eine Zahl» ist also immer eine natürliche Zahl gemeint.

Phase 1:

Vom ersten Arbeitsblatt bearbeitet die eine Hälfte der Klasse den oberen Teil «Schritt für Schritt», die andere den unteren, das «Flussdiagramm». Anschliessend stellen sich die Schüler und Schülerinnen gegenseitig ihre Ergebnisse vor. Sie werden feststellen, dass die Resultate übereinstimmen. Es lohnt sich dann, auf der Metaebene ein Gespräch zu führen über die Art und Weise, wie jede und jeder Einzelne Aufgaben löst und welchen Einfluss die Präsentationsart auf das Lösungsverhalten und die persönliche Einstellung zur Aufgabe hat.

Phase 2:

Die Probleme «Ziffern und Zahlen», «Ungelöstes Problem» und «Knapp 100» können arbeitsteilig in kleinen Gruppen angegangen werden. Nach der Arbeit stellen sich die Gruppen gegenseitig ihre Resultate vor. Die Lehrkraft kann ergänzende Anmerkungen mache (siehe dazu die Hinweise weiter unten).

Phase 3:

Wiederum in Gruppen wird die abschliessende Aufgabe «Schwarze Löcher» angegangen. In einem Klassengespräch wird das Thema ausgewertet und die Arbeit abgeschlossen.

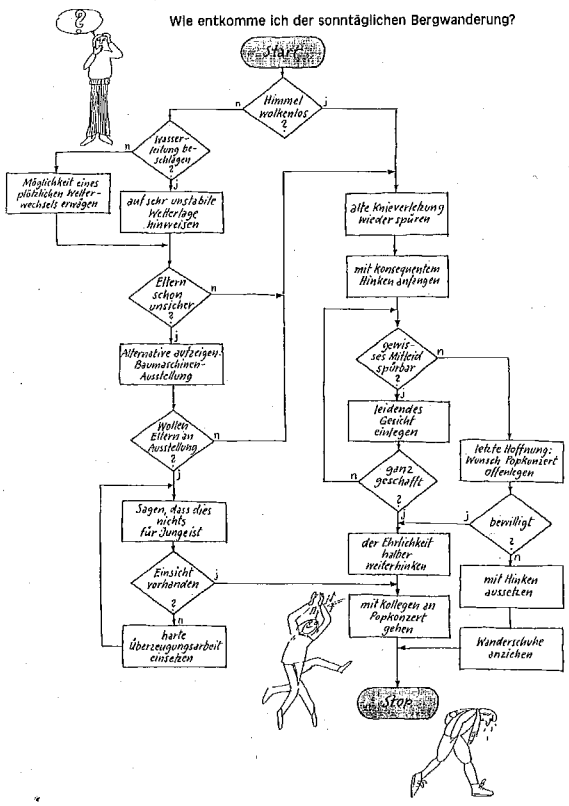
Nun zu den Problemen oder Aufgaben im Einzelnen.

«Schritt für Schritt» und «Flussdiagramm»

(Aufgaben 1 und 2)

Beide Teile dieses Arbeitsblattes enthalten die genau gleichen Aufgaben. Sie wurden übernommen, ergänzt, leicht umformuliert und textlich angepasst aus den beiden Lehrmitteln «Mathematik 5» («Schritt für Schritt») und «Mathematik 8» («Flussdiagramm»).

Flussdiagramme dürfen auch lustig sein



Aus INFORMATIK, Interkantonale Lehrmittelzentrale, Lehrmittelverlag des Kantons Zürich, 1986

Der grosse Unterschied ist auf den ersten Blick ersichtlich: Während oben der Algorithmus in fünf sprachlichen Anweisungen enthalten ist, wird er unten in der Form eines Flussdiagramms präsentiert. Der sich permanent wiederholende Prozess wird durch die im Flussdiagramm deutlich gezeigte Schleifenstruktur visualisiert.

Unter «Schritt für Schritt» heisst es: «... wirst du etwas merken.» Das ist die Frage nach dem Abbruchkriterium, das unten im Flussdiagramm im Kasten mit «...?» offen gelassen ist.

Es macht natürlich wenig Sinn, wenn sich alle Schüler und Schülerinnen mit beiden Aufgaben auf diesem Arbeitsblatt beschäftigen. Aber spannend für sie und die Lehrkraft wird es sein, wenn nach der arbeitsteiligen Bearbeitung nicht nur die

Aus Taschenrechner, Interkantonale Lehrmittelzentrale, Lehrmittelverlag des Kantons Zürich, 1995

Resultate verglichen werden, sondern auch über die Arbeitsweise gesprochen wird: Welche Art der Präsentation der Aufgaben führte zu welchen Verständnisschwierigkeiten? Welche wird von den Schülerinnen und Schüler warum bevorzugt? Gibt es Unterschiede, wie Sprachschwache und -starke auf diese zwei Formen ansprechen?

In der heutigen auf visuelle Präsentation ausgerichteten Kommunikationskultur darf die Chance nicht verpasst werden, auch im Mathematikunterricht eine grafisch orientierte Art der Aufgabenpräsentation, wo es möglich und sinnvoll ist, zu pflegen – ganz abgesehen davon, dass die textlichen Kurzformen, wie sie z.B. in den Flussdiagramm-Kästchen vorkommen, den sprachlich eher schwachen Kindern engegenkommen. Einsicht in den sich mehrfach wiederholenden Ablaufprozess bietet das Flussdiagramm auf eindrückliche Weise; nicht jeder beliebige Algorithmus muss auch zwingend zu einem Ende kommen; hier haben wir es jeweils mit einer Art «Glücksfall» zu tun. Darum werden die folgenden Algorithmen mit Flussdiagrammen präsentiert; sie stammen aus den Büchern «Mathematik 7 und 8» (siehe Quellen) und sind leicht modifiziert und angepasst worden.

Erkundungsresultate bei «Schritt für Schritt» und «Flussdiagramm»:

Abgesehen von den hier uninteressanten so genannten «Schnapszahlen» (Zahlen, die aus lauter gleichen Ziffern bestehen, also 1111, 2222, 3333, 4444, 5555, 6666, 7777, 8888 und 9999), bei denen offensichtlich bereits nach dem ersten Durchgang im Algorithmus 0 herauskommt, führen alle Zahlen spätestens nach sieben Schritten auf die Zahl 6174. Unterwirft man diese Zahl den Algorithmusanweisungen, so ergibt sich:

$$\begin{array}{r} 7641 \\ -1467 \\ \hline 6174 \end{array}$$

Und dabei bleibt es; m.a.W. man kommt nicht mehr weg von 6174.

Dieses Phänomen wurde 1949 vom indischen Mathematiker Dattatreya R. Kaprekar (1905–1986) entdeckt und seither heisst 6174 auch Kaprekar-Konstante. Die Zahlentheoretiker haben sich eingehend mit diesem Algorithmus beschäftigt und ihn in verschiedenen Zahlsystemen und mit unterschiedlichstelligen natürlichen Zahlen untersucht.

Bei den vierstelligen Zahlen im Zehnersystem ist bald ersichtlich, dass bei den grössten resp. kleinsten gebildeten Zahlen die beiden Differenzen zwischen erster und vierter sowie zwischen den beiden mittleren Zahlen entscheidend sind für den Verlauf des Algorithmus.

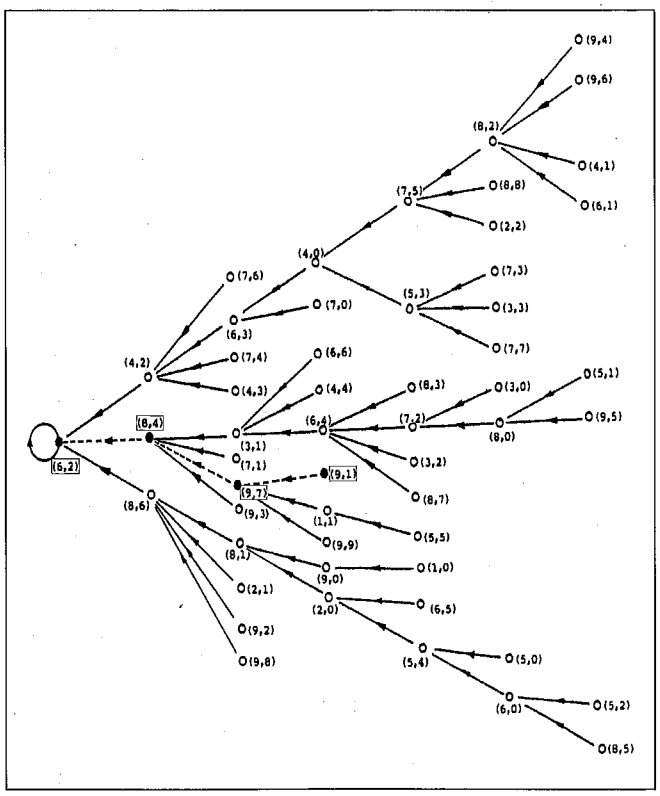
Z.B.:

7906 →	9760	9810	9621	8532	7641
	0679	0189	1269	2358	1467
	9081	9621	8352	6174	6174
Differenzen:	(9,1)	(9,7)	(8,4)	(6,2)	(6,2)

9 7 6 0

Durch Überprüfung und Verfolgung aller möglichen Fälle, etwa mit Hilfe eines Computerprogramms, erhält man den folgenden Grafen, der zeigt, wie man von irgendeiner beliebigen vierstelligen Zahl ausgehend zu 6174 gelangt. Dabei sind nur die oben beschriebenen Differenzen, auf die es ja ankommt, notiert.

Im obigen Beispiel hat der Algorithmus den gestrichelt markierten Verlauf genommen.



Eine tief greifende mathematische Analyse dieses Kaprekar-Verfahrens ist wohl für Schülerinnen und Schüler der Sekundarstufe I kaum möglich. Das Interesse dürfte aber durch das erstaunliche Ergebnis dennoch so weit geweckt sein, dass sie bereit sein werden, die Vorgaben im echten «Forschersinne» zu variieren: Dazu in beiden Versionen die Frage 4, mit der Aufforderung, die Startbedingung zu ändern.

Hier wird sich herausstellen, dass dreistellige Nicht-Schnapszahlen immer auf 495 führen. (Man könnte natürlich dreistellige Zahlen durch Hinzufügen einer führenden Null zu vierstelligen machen: 236 → 0236 und hätte damit den bekannten Verlauf des Algorithmus mit der Kaprekar-Konstanten 6174.)

Fünfstellige Zahlen führen nicht zu einer einzigen Zahl, sondern zu Zyklen von mehreren Zahlen, die sich wiederholen.

«Ziffern und Zahlen» (Aufgabe 3)

Wiederum ist das Abbruchkriterium, der Ausstieg aus der Schleife des Algorithmus, offen gelassen. Die Schülerinnen und Schüler werden nach wenigen Versuchen sicher selber entdecken, dass

- die Zahl 123 sich im Sinne des Algorithmus selber beschreibt: Sie enthält genau 1 gerade Ziffer, 2 ungerade und total 3 Ziffern.
- alle mindestens dreistelligen Zahlen, wie lange sie auch sind, immer kürzer und früher oder später auf 123 reduziert, also von 123 quasi «magisch angezogen» werden.

Nimmt man beispielsweise eine Zahl mit mindestens 10, aber höchstens 99 Stellen, so wird daraus nach dem ersten Durchgang eine höchstens sechsstellige Zahl mit höchstens je zwei Stellen für die Zahl der geraden, ungeraden und aller Ziffern. Aus dieser höchstens sechsstelligen Zahl wird dann im nächsten Durchgang eine dreistellige Zahl. Und dreistellige Zahlen führen im nächsten Schritt auf einen dieser vier Fälle:

G	U	Z
3	0	3
2	1	3
1	2	3
0	3	3

Wie man sich leicht überzeugt, entsteht in allen vier Fällen daraus dann sofort die (magische?) Zahl 123.

Auch ein- oder zweistellige Zahlen können durchaus mit einbezogen werden:

- entweder ergänzt man sie mit führenden Nullen und zählt diese Ziffer(n) zu den geraden
- oder man arbeitet ohne diesen «Trick» und muss dafür u.U. ein paar Schleifendurchgänge mehr in Kauf nehmen. Das zeigt sich schon im oben aufgeführten Fall 033:
  Wird mit 33 weitergearbeitet, so führt das nicht sofort auf 123, sondern auf 22, dann weiter auf 202, 303 und endlich auch wiederum auf 123.

«Ungelöstes Problem» (Aufgabe 4)

Hier ist das Ausstiegskriterium aus der Schleife des Algorithmus gegeben: A = 1.

Der Prozess würde mit 1 auch gar nicht aufhören, sondern in einer Schleife immer weiterlaufen: 1 führt auf 4 über 2 wieder zu 1. Man könnte den Algorithmus allerdings leicht modifizieren, sodass er immer definitiv bei 4 endet.

Kommt man mit dem Algorithmus immer und mit jeder beliebigen Zahl irgendwann mal auf 1? Diese Frage wurde in den Dreissigerjahren des letzten Jahrhunderts aufgeworfen und ist bis heute nicht beantwortet. Ein ungelöstes Problem in der Mathematik – eines, das jedermann verstehen und nachvollziehen kann, da man ja lediglich ganz einfache Operationen durchführen muss und nur der Begriff «gerade Zahl» bekannt sein sollte. Eine Paradebeispiel also, um auch Schülern und

Schülerinnen zu zeigen, dass entgegen vielfacher Vorstellung die Mathematik keine «endgültig fertige» Wissenschaft ist, dass es sogar ganz einfache Fragen gibt, auf die die Fachwissenschaft keine Antwort weiss.

Übrigens:

- Der Tipp in der Aufgabenstellung ist durchaus angebracht; mit 27 als Startzahl benötigt man sehr viele, nämlich 112 Schritte, bis man endlich die Zahl 1 erreicht. Aber wer weiss, vielleicht ist gerade das für gewisse Kinder eine echte Herausforderung.
- Werden die Protokolle im Arbeitsspeicher genau beobachtet, sieht man bald, dass gewisse Zahlen nach einem eigenen Anfangsabschnitt in der Folge dann auf ein Protokoll einer bereits bearbeiten Zahl «einschwenken»; damit kann man sich viel Arbeit sparen – sofern man es merkt; eine gute Gelegenheit, die einzelnen Schüler und Schülerinnen in Bezug auf ihre Fähigkeiten etwas genauer zu beobachten.

Zum Beispiel:

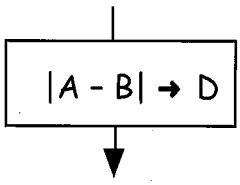
		15
		46
	7	23
	22	70
	11	35
	34	106
	17	53
	52	160
42	26	80
21	13	
64	40	
32	20	
	10	
	5	
	16	
	8	
	4	
	2	
	1	

«Knapp 100» (Aufgabe 5)

Die angesprochenen zwei Fälle werden nach ein paar Versuchen von den Schülern und Schülerinnen sicher bald erkannt:

- Palindromische Zahlen, auch «Spiegelzahlen» genannt, die gleich lauten, ob man sie nun von links nach rechts oder von rechts nach links liest, führen sofort auf die Zahl 0.
- Alle anderen dreistelligen Zahlen führen nach wenigen Schritten auf die Zahl 99. Danach könnte noch ein weiterer Schritt angehängt werden, um wiederum 0 zu erreichen.

Das Flussdiagramm könnte man vereinfachen, wenn den Schülerinnen und Schüler der Begriff des Absolutbetrages bekannt ist. Die Fallunterscheidung, damit beim Subtrahieren keine negativen Zahlen entstehen, wäre dann nicht nötig; die folgende Anweisung statt der drei Kästchen in der Mitte der Schleife würde genügen:



Wer hinter die mathematischen Kulissen dieses Algorithmus schaut, entdeckt bald, dass nach dem ersten Durchlauf die erste Differenz also entweder 0 oder ein Vielfaches von 99 ist. Für den zweiten Fall gelten die folgenden Überlegungen.

Nennt man die dreistellige Startzahl z, so lässt sie sich so schreiben:

$z = a \cdot 10^2 + b \cdot 10^1 + c \cdot 10^0$, wobei a, b und c Ziffern sind und zusätzlich $a \neq 0$ ist.

Subtrahiert wird nun: $c \cdot 10^2 + b \cdot 10^1 + a \cdot 10^0$, wobei man ohne Einschränkung annehmen darf, dass $a > c$ ist.

Die Differenz lautet dann: $(a - c) \cdot (10^2 - 10^0) = (a - c) \cdot 99$, also ein Vielfaches von 99.

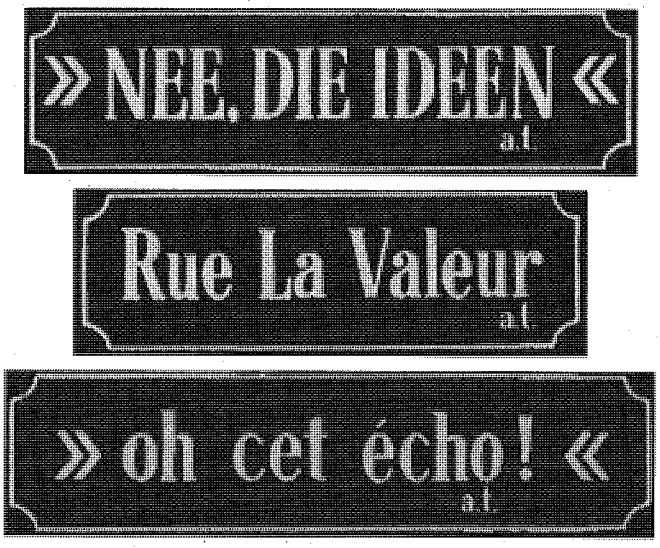
Die acht dreistelligen Vielfachen von 99 können einander paarweise zugeordnet werden; eine entspricht rückwärts gelesen der anderen:

198 ↔ 891
396 ↔ 693
297 ↔ 792
495 ↔ 594

Deren Differenz ist demzufolge wiederum ein Vielfaches von 99, und man sieht, dass man jeweils einfach quasi eine Zeile tiefer «rutscht». Die untersten beiden Zahlen haben die Differenz 99 und damit ist der Algorithmus zu Ende.

Im Gegensatz zum «Ungelösten Problem» ist dieser Algorithmus beweisbar, wie die Argumentation oben zeigt. Können auch Schülerinnen und Schüler diese Begründung nachvollziehen oder vielleicht sogar selber in ähnlicher Form entwickeln? Benötigt wird nicht viel mehr als etwas Einsicht in den Aufbau des dezimalen Stellenwertsystems unserer Zahlnotation und allenfalls etwas Algebra und Potenzrechnen, sofern verallgemeinert argumentiert werden soll.

Die zweite Frage zielt dann über die Mathematik hinaus, geht es doch um Palindrome, also Worte, die man auch rück-



Der Schweizer Wort- und Bildkünstler André Thomkins (1930–1985) war berühmt für seine Palindrome. Im Kunsthaus Luzern sind seine Strassenschilder ausgestellt.
Palindrome, wie: «Ein Neger mit Gazelle zagt im Regen nie.» lassen sich rückwärts lesen. Wo finden die Jugendlichen im Internet und in der Literatur noch weitere Wörter oder Sätze zum vor- und rückwärts lesen?

wärts lesen kann. Dabei kann unterschieden werden, ob das Wort von rechts her gelesen den gleichen oder einen anderen Sinn ergibt:

RELIEFPFEILER respektive LEBEN – NEBEL.

Nur Zahlen, die die palindromische Eigenschaft der ersten Art aufweisen, sind natürlich von Interesse. Sie führen ja im Algorithmus sofort auf die Zahl 0. (Alle Zahlen sind im Sinne der zweiten Art palindromisch.)

Palindrome (der ersten Art) weisen eine Art Symmetrie auf, die aber von anderer, abstrakterer Art ist als die den Schülern und Schülerinnen bekannte Achsensymmetrie aus der Geometrie. Aber auch diese kann auftreten, wie die Beispiele

OTTO und UHU (nicht aber ANNA)

zeigen.

Mit der Suche nach palindromischen Sätzen – dazu gibt es Sammlungen – kann das Thema leicht in sprachlicher Richtung ausgeweitet werden.

«Schwarze Löcher» (Aufgabe 6)

Diese kaum mehr vorstellbaren astronomischen Objekte beflügeln die Fantasie; kaum ein Weltraum-Sciencefiction-Film kommt ohne sie aus.

Ein schwarzes Loch ist «ein Körper, der so stark zusammengedrängt ist, dass er sogar sein eigenes Licht gefangen hält. Ein schwarzes Loch entsteht, wenn sich ein zusammenfallender Stern oder ein anderer Körper in ein Gravitationsfeld verwickelt, das stark genug ist, um nur Teilchen hinauszulassen, die schneller sind als das Licht. Obwohl der Ausdruck romantische Vorstellungen von ‹Löchern im Raum› weckt, ist ein schwarzes Loch im Grunde eine recht gewichtige Sache.» (Ferris, 1982)

Schwarze Löcher werden im Kapitel «Das Ende eines Sterns» im Arbeitsheft «Sternkunde» (Eggmann, 98) so beschrieben:

Für eine sterbende Sonne «... gibt es zwei Möglichkeiten:

1. Sie bleibt ein leuchtender kleiner Stern, der weiterhin beobachtbar ist. Wenn ihre Materie aber sehr dicht zusammenstürzt, wird ihre Gravitation derart riesig, dass sie sogar ihr eigenes Licht anzieht und verschluckt. Auch Licht und Radiowellen der Umgebung werden von ihr abgelenkt oder sogar aufgenommen. Sie wirkt wie ein kosmischer Staubsauger, der alles verschluckt. Sie ist zu einem schwarzen Loch geworden. Schwarze Löcher sind demnach keine Löcher im All, sondern Himmelsobjekte, deren Masse und Dichte ungeheuer gross, deren Ausdehnung aber relativ klein ist. Ein Fingerhut voll der Materie eines schwarzen Loches wiegt mehrere tausend Tonnen. Was immer in seinen Anziehungsbereich gerät, wird auf den erloschenen Stern niederstürzen und für immer von ihm festgehalten werden.
2. Sterne können aber auch ein anderes Ende nehmen: Sie explodieren. Man nennt das Supernova. Ihre Materie wirbelt dann als Gas- und Staubwolke durch die Galaxie. Schliesslich verbindet sie sich mit weiterer interstellarer Materie. Sie beginnt sich erneut zu verdichten und formt als rotierende Gasscheibe eine neue Sonne, eventuell mit Planeten und Monden.»

Bei den in diesem Abschnitt gestellten Aufgaben geht es darum, dass die Schülerinnen und Schüler selber Informationen über schwarze Löcher mit Hilfe von astronomischer Literatur, Lexika oder dem Internet zusammentragen sollen und den Bezug zu den mathematischen Algorithmen suchen: Es gibt Zahlen im Zahlenuniversum, die sich bei der Anwendung bestimmter Algorithmen wie schwarze Löcher verhalten, d.h., mit welcher Zahl man auch startet, immer endet man am Schluss bei der betreffenden Zahl und kommt nicht mehr davon weg.

In den hier vorgestellten Beispielen treten folgende schwarzen (Zahlen-)Löcher auf:

- «Schritt für Schritt» resp.
- «Flussdiagramm»: 6174 (Ausnahmen sind die Schnapszahlen)
- «Ziffern und Zahlen»: 123
- «Ungelöstes Problem»: 1 (In der hier vorgestellten Version des Algorithmus eigentlich eine Endlosschleife)
- «Knapp 100»: 99 (respektive 0) («Unechte» Ausnahmen sind die palindromischen Zahlen, die auf 0 führen, denn wird ein weiterer Durchgang durch das Flussdiagramm gemacht, so führt auch 99 auf die Zahl 0.)

Es gibt weitere Algorithmen in der Mathematik, die auf schwarze Löcher führen; dazu sei auf die Literatur verwiesen.

Christian Rohrbach

Quellen:

- Mathematik 5, Lehrmittelverlag des Kantons Zürich, 1998; ISBN 3-906719-66-9; Seite 80
- Mathematik 8, Lehrmittelverlag des Kantons Zürich, 2001³; ISBN 3-906719-43-X; Seite 88
- Mathematik 8, Lehrmittelverlag des Kantons Zürich, 2001³; ISBN 3-906719-43-X; Seite 87
- Mathematik 7, Lehrmittelverlag des Kantons Zürich, 1999³; ISBN 3-906718-76-X; Seite 154
- Mathematik 7, Lehrmittelverlag des Kantons Zürich, 1999³; ISBN 3-906718-76-X; Seite 109
- M. Erni, Ch. Rohrbach, Wie ein Computer funktioniert, Lehrmittelverlag des Kt. ZH, 1989²
- François Fricker, Nachfrage (früher Mathemagisches), Das Magazin («Tages Anzeiger»), Nr. 3/94, 25/94, 50/95, 40/96, 44/99, 17/00, 20/00
- Michael Ecker, Vorsicht: Schwarze Löcher lauern überall, «Tages Anzeiger», 17.2.1993
- Timothy Ferris, Die rote Grenze, Auf der Suche nach dem Rand des Universums, Birkhäuser, Basel 1982, ISBN 3-7643-1331-5
- Heinz Eggmann, Thema: Sternkunde, Kant. Lehrmittelverlag St. Gallen, Rorschach, Nr. 3, 22. Jahrgang, Sept. 98

Aufgabe 1: Schritt für Schritt

1. • Wähle eine vierstellige Zahl, die nicht aus lauter gleichen Ziffern besteht.
   • Bilde mit den vier Ziffern dieser Zahl die grösste und die kleinste mögliche Zahl.
   • Rechne den Unterschied der beiden Zahlen aus.
   • Bilde mit den ~~fünf~~ Ziffern der ausgerechneten Differenz wieder die grösste und die kleinste mögliche Zahl. Rechne wiederum ihren Unterschied aus.
   • Fahre so weiter. Nach einigen Schritten wirst du etwas merken.

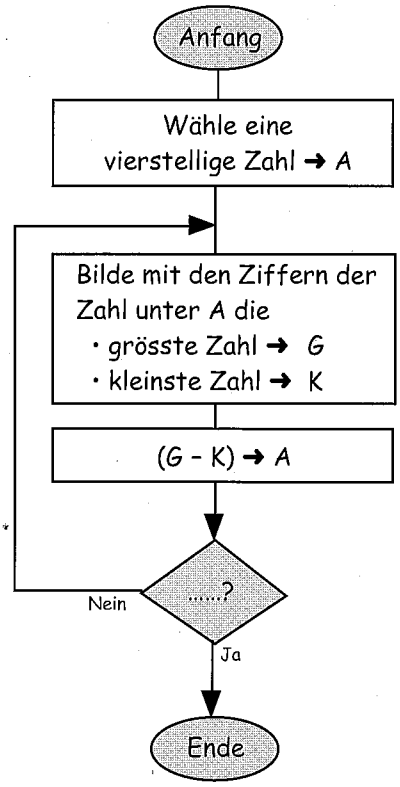
H 4

2. Nimm weitere vierstellige Zahlen und rechne in der gleichen Weise wie in Aufgabe 1. Vergleiche deine Rechnungen mit denjenigen deiner Mitschüler und Mitschülerinnen. Was stellst du fest?

3. «Schnapszahlen» sind Zahlen, die aus lauter gleichen Ziffern bestehen.
   Was beobachtest du, wenn du die Aufgabe 1 (entgegen der Anleitung) mit einer Schnapszahl löst?

4. Was stellst du fest, wenn du statt vierstellige Zahlen dreistellige nimmst;
   was passiert, wenn du fünfstellige Zahlen wählst?

Aufgabe 2: Flussdiagramm



Im Flussdiagramm bedeutet das Zeichen « ➜ ☆ »
«trage die Zahl im Arbeitsspeicher in der Spalte unter ☆ ein».

1. «Schnapszahlen» sind Zahlen, die aus lauter gleichen Ziffern bestehen.
   Wähle zuerst einmal keine Schnapszahl und löse damit die Aufgabe aus dem Flussdiagramm. Welche Frage passt wohl statt «.....?» ins unterste Kästchen des Flussdiagramms?

2. Löse die Aufgabe mehrmals mit verschiedenen vierstelligen Zahlen und überprüfe deine Vermutung. Vergleiche auch mit deinen Mitschülerinnen und Mitschülern.

3. Was stellst du fest, wenn du die Aufgabe (entgegen der Anleitung in 1.) mit einer Schnapszahl löst?

4. Was kommt heraus, wenn du statt vierstellige nur dreistellige Zahlen nimmst?
   Und wenn du fünfstellige Zahlen wählst?

Arbeitsspeicher

A	G	K

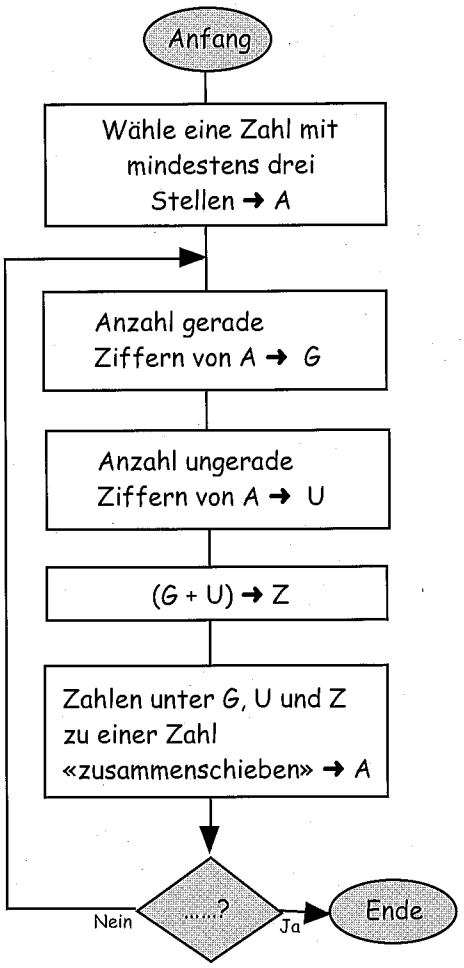
© by neue schulpraxis

Aufgabe 3: Ziffern und Zahlen

1. Im zweituntersten Kästchen des Flussdiagramms steht, du sollst Zahlen «zusammenschieben».
   Das geht so:
   Die drei Zahlen 12, 5 und 4 zum Beispiel zusammengeschoben ergeben die Zahl 1254.
   Alles klar?
   Löse die Aufgabe aus dem Flussdiagramm mit verschiedenen Zahlen.
   Was würdest du im untersten Kästchen eintragen?

2. Probiere es auch mit einer «Riesenzahl», einer mit z.B. 20 oder noch mehr Stellen.

3. Geht das Verfahren nicht auch mit einstelligen oder zweistelligen Zahlen am Anfang?

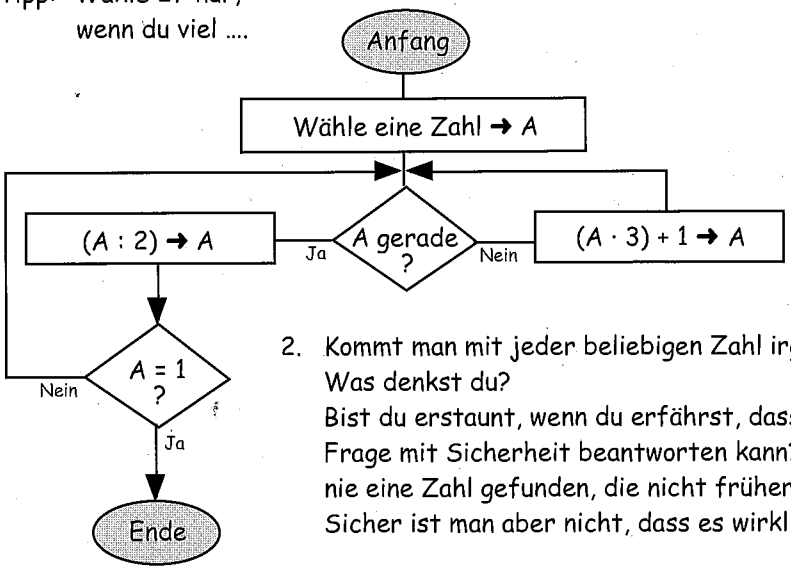


Arbeitsspeicher

A	G	U	Z

Aufgabe 4: Ungelöstes Problem

1. Löse die Aufgabe aus dem Flussdiagramm mit verschiedenen Zahlen.
   Tipp: Wähle 27 nur, wenn du viel ....



Arbeitsspeicher

A

2. Kommt man mit jeder beliebigen Zahl irgend einmal auf 1, also zum Ende? Was denkst du?
   Bist du erstaunt, wenn du erfährst, dass bis heute noch niemand diese Frage mit Sicherheit beantworten kann? Das heisst, man hat bis jetzt noch nie eine Zahl gefunden, die nicht früher oder später auf 1 geführt hätte. Sicher ist man aber nicht, dass es wirklich bei allen Zahlen so verläuft!

© by neue schulpraxis

Aufgabe 5: Knapp 100

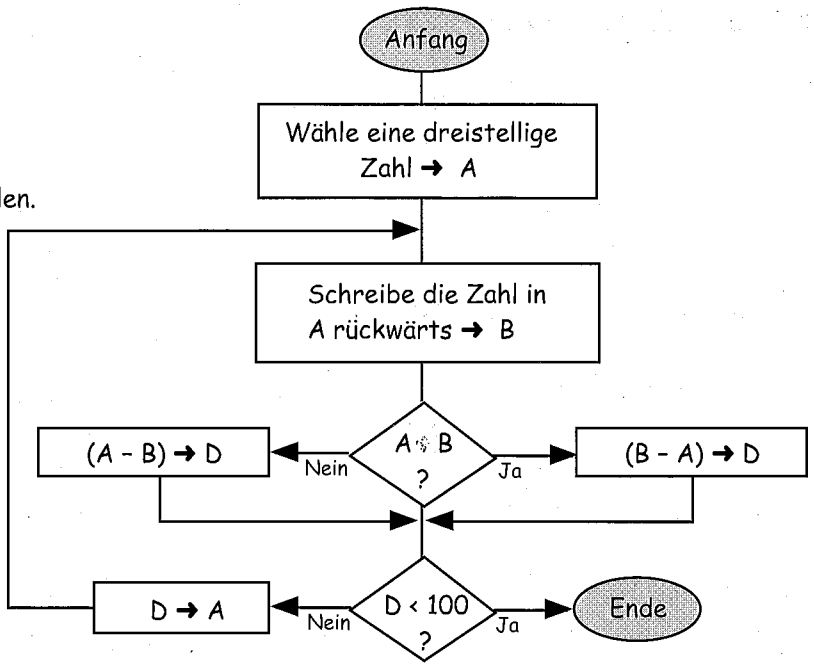
1. Löse die Aufgabe, die das Flussdiagramm aufzeigt, mit mehreren verschiedenen Zahlen. Es gibt zwei verschiedene Fälle, wie du zum Ende gelangst. Nämlich?

2. Die Zahlen beim einen der zwei Fälle zeigen etwas Ähnliches wie die folgenden Wörter:

   ANNA
   OTTO
   UHU

   Welchen Zusammenhang siehst du?

   Kennst du weitere solche Wörter?



Arbeitsspeicher

A	B	D

Aufgabe 6: Schwarze Löcher

1. Was weisst du über die so genannten schwarzen Löcher?
   Suche in einem Lexikon oder im Internet nach diesem Begriff aus der Astronomie.
   http://www.astronomie.de/ ist eine günstige Adresse zum Starten im Internet.
   Schreibe einen kurzen Text, in dem du den Begriff erklärst und die wichtigsten Eigenschaften eines schwarzen Loches erwähnst.

2. Was ist deiner Meinung nach der Zusammenhang zwischen den Mathematikaufgaben «Schritt für Schritt», «Flussdiagramm», «Ziffern und Zahlen», «Ungelöstes Problem», «Knapp 100» und den schwarzen Löchern in der Astronomie?

© by neue schulpraxis